第一章 线性空间

本章将把向量空间的概念推广为线性空间，并讨论线性空间、线性变换及内积空间的一些性质.

本章目录

1.1 线性空间

1.1.1 线性空间的概念

1.1.2 线性空间的基和维数

1.1.3 基变换和坐标变换

1.1.4 线性空间的同构

1.1.1 线性空间

- 线性代数中给出了*n*维向量的概念.
- *n*元有序数组称为*n*维向量.
- 实数域**R**上全体*n*维向量的集合记为$\mathbf{R}^n$.
- *n*维向量上可定义加法与数乘运算, 且加法与数乘运算满足若干运算律.
- 数乘中的"数"来自于一个数域, 如实数域.
- 对四则运算封闭且包含0,1的数集称为数域, 如有理数域**Q**, 实数域**R**, 复数域**C**等.

定义1 设V是一个**非空集合**, P是**数域**. 在V上定义两个运算:

① 加法: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$,

② 数乘: $\lambda \in P, \boldsymbol{x} \in V \Longrightarrow \lambda \boldsymbol{x} \in V$;

如果满足:

1) (加法交换律) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$,

2) (加法结合律) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$,

3) (零元素) 存在$\boldsymbol{0} \in V$, 使得对任意$\boldsymbol{x} \in V$, 总有$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$, ($\boldsymbol{0}$称为$V$中的零元素)

4) (**负元素**) 对任意$\boldsymbol{x}\in V$, 存在$\boldsymbol{y}\in V$, 使$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, ($\boldsymbol{y}$称为$\boldsymbol{x}$的负元素，记作$-\boldsymbol{x}$)

5) (分配律) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$,

6) (分配律) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$,

7) (数乘结合律) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \mu(\lambda\boldsymbol{x})$,

8) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

则称V为数域P上的**线性空间**.

例1 设P是数域，则P^n是P上的线性空间. (**向量空间**)

例2 记数域P上的所有$m\times n$矩阵组成的集合为$P^{m\times n}$，则$P^{m\times n}$按通常矩阵的加法与数乘构成P上线性空间. (**矩阵空间**)

例3 数域P上的全体一元多项式组成的集合$P[x]$是P上的线性空间; (**多项式空间**)

例3' 数域P上的**次数小于*n***的多项式与零多项式组成的集合也构成P上的线性空间，记作$P[x]_n$. (**多项式空间**)

例4 闭区间$[a, b]$上所有实连续函数组成的集合, 按函数的加法和数乘, 构成实数域**R**上的线性空间, 记作$C[a, b]$. (函数空间)

注: ① 加法运算和数乘运算统称为线性运算.

② 线性空间中的元素也称为向量.

③ 实数域**R**上的线性空间称为**实线性空间**, 复数域**C**上的线性空间称为**复线性空间**.

性质：设V是数域P上的线性空间, $\boldsymbol{x} \in V$, $\lambda \in P$.

① V 中的零向量唯一;

② V 中每个向量的负向量唯一;

③ $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$;

④ $\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$当且仅当$\lambda=0$或$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

⑤ $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$.

例5 记 $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, 在 $\mathbf{R}^+$上定义新的"加法$\oplus$"和"数乘$\otimes$"为:

$$x \oplus y = xy,\ \ \lambda \otimes x = x^{\lambda},\ \ x, y \in \mathbf{R}^+,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

则在此加法和数乘下, $\mathbf{R}^+$为$\mathbf{R}$上的线性空间.

注: $\mathbf{R}^+$中的"零元素"为1，x的"负元素"为$1/x$.

1.1.2 线性空间的基和维数

本小节总假设V是数域P上的线性空间.

设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in P$.

① 称$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r$为$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$的一个**线性组合**;

② 若 $\boldsymbol{y}$ 等于$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$的某个线性组合, 则称$\boldsymbol{y}$可由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$**线性表示**;

③ 若存在不全为零的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in P$使得

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0},$$

则称$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$线性相关, 否则称线性无关.

④ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$线性无关的充要条件是:

若$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$, 则$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_r=0$.

⑤ 在线性空间中, 也可定义秩和极大无关组, 且性质类似.

⑥ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$的秩记作$R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r)$.

例6 设P是数域, 在$P^{2\times 2}$中, 证明

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

线性无关.

证 设$\lambda_1E_{11}+\lambda_2E_{12}+\lambda_3E_{21}+\lambda_4E_{22}=0$, 则

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, 即得.

性质 设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$线性无关, 但$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}$线性相关, 那么$\boldsymbol{y}$可由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$线性表示.

证明 已知存在不全为零的数$k_1,k_2, \ldots,k_r, l$使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+k_r\boldsymbol{x}_r+l\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}.$$

注意 $l \neq 0$, 否则$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$线性相关, 因此

$$\boldsymbol{y} = -\frac{1}{l}(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r)$$

即得 $\boldsymbol{y}$ 可由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ 线性表示.

定义2 设V中有n个向量$x_1, x_2, \cdots, x_n$满足:

① $x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关;

② V中任一向量都可由$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性表示,

就称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基,n称为V的维数, 记作 dim$V$.

问 基是否一定存在?

答 基一定存在, 但可能包含无穷多个向量.

注 ① 如果基包含无穷多个向量, 就称该线性空间是无限维的, 例如$P[x]$和$C[a, b]$.

② 本课程总假设线性空间是有限维的.

③ 如果$\dim V = n$, 那么V中最多有n个向量线性无关.

性质 ① V 的基就是V 本身的极大无关组;

② $\dim V$ 就是V 本身的秩;

③ V 有无穷多组基.

常见线性空间的基和维数

① 由线性代数知

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

构成P^n的一组基, 因此$\dim P^n = n$.

② 在例5所给的线性空间$\mathbf{R}^+$中, 任何不等于1的正数都是基(注意1是$\mathbf{R}^+$的零元素.)

证明 取定$a > 0, a \neq 1$, 则对任意 $x \in \mathbf{R}^+$, 有

$$x = a^{\log_a x} = (\log_a x) \otimes a,$$

即x可由a线性表示, 因此a就是$\mathbf{R}^+$的一组基,

从而$\dim \mathbf{R}^+ = 1$.

③ 由例6知

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

线性无关,

显然$P^{2\times 2}$中的任意矩阵可由它们线性表示,

从而它们是$P^{2\times 2}$的一组基，故$\dim P^{2\times 2}=4$.

④ 一般地，记i行j列位置元为1，其余位置元都为0的$m\times n$矩阵为E_{ij}，即

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

则

$$E_{ij}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$$

是$P^{m\times n}$的一组基，因此$\dim P^{m\times n} = mn.$

定义3 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基, 对V中任一向量$\boldsymbol{y}$, 必存在一组数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in P$, 使

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

称$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$为 $\boldsymbol{y}$ 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$下的**坐标**.

注 向量在给定的基下的坐标是**唯一**的.

例7 在线性空间

$$P[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}|a_i\in P\}$$

中.

① 证明$1,x,,\cdots,x^{n-1}$是一组基, 从而$P[x]_n$的维数为n.

② 求$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$在基$1,x,\cdots,x^{n-1}$下的坐标.

解 ① 先证$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$线性无关, 设

$$k_0+k_1x+\cdots+k_{n-1}x^{n-1}=0$$

对任意x都成立, 可得

$$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0,$$

所以$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$线性无关.

另一方面, 显然$P[x]_n$中的任意多项式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

可由$1,x,\cdots,x^{n-1}$线性表示, 故$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$

是$P[x]_n$的一组基, 从而$\dim P[x]_n=n$.

② 易见

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

$$=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$$

因此$f(x)$ 在$1,x,\cdots,x^{n-1}$下的坐标为$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$.

例8 已知$P^{2\times 2}$空间中的一组基为

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

求$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$在这组基下的坐标.

解 设$B=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$, 计算得

线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1, \\ \quad k_1 + k_2 + k_3 = 2, \\ \quad k_1 + k_2 + k_4 = 1, \\ \quad k_1 + k_3 + k_4 = 0. \end{cases}$$

解得

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = -1,$$

所以B在这组基下的坐标为$(1, 1, 0, -1)^T$.

1.1.3 基变换和坐标变换

- 线性空间有无穷多组基;
- 一个向量在不同基下的坐标一般不相同;
- 以下讨论同一个向量在不同基下的坐标的关系.
- 本小节总假设V是数域P上的线性空间.

设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$是$V$的两组基，则后一组基可用前一组基唯一线性表示，即

$$\boldsymbol{y}_1 = q_{11}\boldsymbol{x}_1 + q_{21}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + q_{n1}\boldsymbol{x}_n,$$
$$\boldsymbol{y}_2 = q_{12}\boldsymbol{x}_1 + q_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + q_{n2}\boldsymbol{x}_n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{y}_n = q_{1n}\boldsymbol{x}_1 + q_{2n}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + q_{nn}\boldsymbol{x}_n.$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \\
&= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

令$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n}$, 则

$$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{Q},$$

$\boldsymbol{Q}$称为从基$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$到$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$的过渡矩阵, 上式称为基变换公式.

性质 ① 过渡矩阵由两组基**唯一**确定.

② 过渡矩阵一定**可逆**.

证明 ① 由坐标的唯一性即得(过渡矩阵的列是后一组基在前一组基下的坐标).

② 设$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{Q}$如前,

再设$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n)\boldsymbol{S}$, 代入得

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{QS},$$

又显然有$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{E}$,

由①可得$\boldsymbol{QS} = \boldsymbol{E}$, 因此$\boldsymbol{Q}$可逆.

设

$$\xi = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix},$$

将基变换公式代入得

$$\xi = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},$$

上式称为**坐标变换**公式.

例9 取$P[x]3$的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = 1, \boldsymbol{\alpha}_2 = x, \boldsymbol{\alpha}_3 = x^2$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_1 = 1, \boldsymbol{\beta}_2 = x - x_0, \boldsymbol{\beta}_3 = (x - x_0)^2.$$

求前一组基到后一组基的过渡矩阵，并计算$\boldsymbol{q} = 3 - x^2$在后一组基下的坐标.

解 所求过渡矩阵为$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -x_0 & x_0^2 \\ & 1 & -2x_0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$

解 所求过渡矩阵为$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & -x_0 & x_0^2\\ & 1 & -2x_0\\ & & 1\end{pmatrix}$.

注意$\boldsymbol{q}=3-x^2$在前一组基下的坐标为$\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$,

所以$\boldsymbol{q}$在后一组基下的坐标为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-x_0^2\\-2x_0\\-1\end{pmatrix}.$$

性质 在P^n中, 从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

证明 设$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{Q}$,

注意

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

都是P上的**n阶可逆方阵**, 做矩阵运算即得.

注 上公式仅在P^n中成立.

例10 取P^4的两组基:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

求前一组基到后一组基的过渡矩阵$\boldsymbol{Q}$.

解 所求过渡矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24&24&0&0\\-12&12&0&0\\-12&-20&8&-8\\3&-7&4&8\end{pmatrix}.$$

例11 取$P^{2\times 2}$的两组基:

$$(\mathrm{I}): \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(\mathrm{II}): \boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

① 求从(I)到(II)的过渡矩阵$\boldsymbol{Q}$;

② 求(I)到(II)的坐标变换公式.

解 ① 取第3组基(III): $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 计算知

$$(\mathrm{I}) = (\mathrm{III})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{II}) = (\mathrm{III})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

分别记上面两个过渡矩阵为$\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$, 则

$$(\mathrm{III}) = (\mathrm{I})\boldsymbol{Q}_1^{-1}, (\mathrm{II}) = (\mathrm{III})\boldsymbol{Q}_2,$$

代入得

$$(\mathrm{II}) = (\mathrm{I})\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_2$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

② 设$\boldsymbol{A}$在(I)和(II)下的坐标分别为$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$, 则坐标变换公式为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\eta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\xi}.$$

1.1.4 线性空间的同构

定义4 设V与V'都是数域P上的线性空间, 若V与V'的元素之间有一个一一对应:

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}' \ (\boldsymbol{x}\in V,\ \boldsymbol{x}' \in V'),$$

并且当$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}'$时, 有

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}',\ \ k\boldsymbol{x} \leftrightarrow k\boldsymbol{x}' \ (k\in P),$$

则称V与V'**同构**, 记作$V \cong V'$, 并称它们元素间的一一对应为**同构对应**.

命题: 设V, V', V''是数域P上的线性空间.

① 反身性: $V\cong V$;

② 对称性: 若$V\cong V'$, 则$V'\cong V$;

③ 传递性: 若$V\cong V'$, $V'\cong V''$, 则$V\cong V''$.

注: ① 满足反身性, 对称性, 传递性的关系成为**等价关系**.

② 线性空间的同构关系, 矩阵的相似都是等价关系.

定理1 数域P上的n维线性空间V与P^n同构.

证明 取定V的一组基$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$, V中任一向量$\boldsymbol{x}$在这组基下有唯一的坐标$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$,

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, , \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此建立V与P^n之间的对应关系:

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

这显然是一一对应.

设

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \ y \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

计算得

$$x+y \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 \\ \lambda_2+\mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

$$kx \leftrightarrow \begin{pmatrix} k\lambda_1 \\ k\lambda_2 \\ \vdots \\ k\lambda_n \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

因此V与P^n同构.

推论1 数域P上所有维数相同的(有限维) 线性空间都同构.

线性空间元素间的同构对应有如下性质：

① 零元素对应零元素;

② 负元素对应负元素;

③ 线性组合对应线性组合;

④ 同构对应保持线性相关和线性无关;

⑤ 同构的(有限维) 线性空间的维数相同.

定理2 数域P上两个有限维线性空间**同构**的充要条件是它们的**维数相同**.

注: ① 同构的线性空间具有相同的代数结构,

因此在研究复杂的线性空间时，可用一个维数相同但更简单线性空间来代替;

② 特别地, 可以用P^n来代替数域P上的任一n维线性空间.

例11 求$P^{2\times 2}$中向量组

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

的极大线性无关组和秩.

解 取$P^{2\times 2}$的基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 则$A_1, A_2, A_3,$ A_4的坐标分别为

解 取$P^{2\times 2}$的基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$, 则$A_1,A_2,A_3,$ A_4的坐标分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$做**初等行变换**得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即得$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$, 且$\alpha_1,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组,

因此$R(A_1,A_2,A_3,A_4)=2$, 且A_1,A_3是A_1,A_2,A_3,A_4的一个极大无关组.

1.2 线性子空间

1.2.1 线性子空间

1.2.2 维数公式

1.2.3 子空间的直和

1.2.1 线性子空间

本小节总假设V是数域P上的线性空间.

定义1 设W为V的一个非空子集, 如果W对V中的加法和数乘也构成P上的线性空间, 则称W为V的一个**线性子空间**, 简称**子空间**.

问: 设W是V的非空子集, 如何判定W是不是V的子空间?

定理1 V的非空子集W是子空间的充要条件为: W对V中的线性运算(加法和数乘)封闭.

注: ① 若W是V的子空间, 则W的基在V中线性无关, 其中向量个数不超过$\dim V$, 因此

$$\dim W \le \dim V.$$

② $\{\mathbf{0}\}$和V本身是V的子空间, 称为V的平凡子空间, 其它子空间称为非平凡子空间.

③ 约定$\{\mathbf{0}\}$的基为空集, 维数为0.

例1 $P[x]_{n-1}$是$P[x]_n$的子空间($n > 1$).

例2 $\{(0, y, z)^T \mid y, z \in P\}$为$P^3$的子空间.

例3 设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\in V$, 则

$$\mathrm{Span}\{x_1,\cdots,x_r\}=\{\lambda_1x_1+\cdots\lambda_rx_r|\lambda_k\in P\}$$

是V的子空间, 称为$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$生成的子空间, $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$称为生成元.

① $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}$可由$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$线性表示.

② $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$的极大无关组是$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$的基, $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$的维数为$R(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r)$.

③ 线性空间由其一组基生成.

例4 齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解集构成$P^n$的子空间, 称为此方程组的**解空间**.

注: $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系就是解空间的基, 解空间的维数等于$n-R(\boldsymbol{A})$.

例5 在$P^{2\times 2}$中, 记

$$W=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\middle| a_{11}+a_{22}=0\right\}.$$

① 证明W是$P^{2\times 2}$的子空间;

② 求W的维数和一组基.

定理2 设V_1, V_2是V的子空间, 则$V_1 \cap V_2$也是V的子空间.

证明 V_1, V_2都包含V的零元素, 故$V_1 \cap V_2$非空.

设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1 \cap V_2$, 则$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_2$, 故

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{x} \in V_1,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{x} \in V_2,$$

因此有$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V_1 \cap V_2$, $\lambda\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$, 即得.

例6 设V_1, V_2为分别为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的解空间, 则$V_1 \cap V_2$为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{B}_{s\times n} \end{pmatrix} x = 0$$

的解空间.

定理3 设V_1, V_2是V的子空间, 则

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{x}_1\in V_1,\ \boldsymbol{x}_2\in V_2\}$$

也是V的子空间, 称为V_1, V_2的**和**.

证明 由$\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}$可知$\mathbf{0}\in V_1+V_2$, 故$V_1+V_2$非空.

若$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V_1+V_2$, $k\in P$, 则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\ \ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1\in V_1,\ \ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2\in V_2,$$

若$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V_1+V_2, k\in P$, 则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1\in V_1,\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2\in V_2,$$

于是

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2,$$

同理

$$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2 \in V_1+V_2,$$

因此V_1+V_2是子空间.

注 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r\}+\mathrm{Span}\{\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_s\} =$

$$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_s\}.$$

例7 设V_1=Span{$\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$}, V_2= Span{$\boldsymbol{y}_1$,$\boldsymbol{y}_2$}, 其中

$$x_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix},$$

$$y_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, y_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

分别计算V_1+V_2与$V_1\cap V_2$的维数和基.

解 已知

$$V_1+V_2 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\},$$

计算可知$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1$是$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$的极大无关组,

因此$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1$是$V_1+V_2$的基, $\dim(V_1+V_2) =3$.

设$\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2$, 则有$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$使得

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2=\mu_1\boldsymbol{y}_1+ \mu_2\boldsymbol{y}_2,$$

由此得齐次线性方程组

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2 - \mu_1\boldsymbol{y}_1+ \mu_2\boldsymbol{y}_2 = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求得通解为$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = c(3,-1,1,-4)$, 从而

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2=\mu_1\boldsymbol{y}_1+\mu_2\boldsymbol{y}_2 = c(5, -2, -3, -4)^T.$$

因此$V_1 \cap V_2$的元素都是$(5,-2,-3,-4)^T$的倍数,

故$V_1 \cap V_2$的基为$(5,-2,-3,-4)^T$, 维数是1.

定理4 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r\} = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_s\}$的充要条件是$\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r$和$\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_s$**等价**，即这两个向量组可**相互线性表示**.

证明 留作习题.

1.2.2 维数公式

本小节总假设V是数域P上的线性空间.

引理 (基扩充) 设$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r$是$V$中线性无关的向量, 则$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r$可扩充为$V$的基.

证明 若$V=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r\}$, 则$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r$就是$V$的基.

若$V\neq\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r\}$, 则存在$\boldsymbol{x}_{r+1}\notin\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_r\}$,

于是$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1}$线性无关.

再对$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1}\}$重复以上的讨论,

由于V的**维数有限**, 最终可找到

$$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n$$

线性无关, 使得

$$V=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n\},$$

即得$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n$是$V$的一组基.

推论 设W是V的子空间, 如果$\dim W = \dim V$, 那么$W = V$.

证明 设$\dim W = \dim V = r$, 取W的基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$, 则$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$也是$V$的基, 即得.

定理5 (维数公式) 设V_1, V_2是V的子空间, 则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

推论 若$\dim V_1+\dim V_2 > \dim V$, 则$V_1\cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

证明 已知$\dim V \geq \dim(V_1+V_2)$, 于是

$$\dim V_1+\dim V_2 > \dim V \geq \dim(V_1+V_2),$$

由维数公式得

$$\dim(V_1\cap V_2) > 0,$$

因此$V_1\cap V_2$含有非零向量.

1.2.3 子空间的直和

本小节总假设V是数域P上的线性空间.

定义2 设V_1, V_2是V的子空间, 若V_1+V_2中每个向量 $\boldsymbol{x}$ 的分解式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \quad (\boldsymbol{x}_1\in V_1, \boldsymbol{x}_2\in V_2)$$

都**唯一**, 则称V_1+V_2为**直和**, 记作$V_1\oplus V_2$.

注 分解式唯一指: 如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$, 那么$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2$.

例8 在P^3中, 设

$$V_1 = \{(u, v, 0)^T | \ u, v \in P\},$$

$$V_2 = \{(u, 0, w)^T | \ u, w \in P\},$$

则$V_1 + V_2$不是直和.

证明 注意到

$$(1, 1, 1)^T = (1, 1, 0)^T + (0, 0, 1)^T$$

$$= (0, 1, 0)^T + (1, 0, 1)^T,$$

分解式不唯一, 所以$V_1 + V_2$不是直和.

定理6 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2 \Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

证明 若$V_1\cap V_2$有非零元素$\boldsymbol{x}$，则

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}+\mathbf{0},$$

即$\mathbf{0}$的分解式不唯一, 因此V_1+V_2不是直和.

反之, 若V_1+V_2不是直和, 则V_1+V_2中有向量$\boldsymbol{u}$的分解式不唯一．设

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2\ (\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{y}_2),$$

则有非零元 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{x}_2\in V_1\cap V_2$, 矛盾.

例8 在P^3中, 设

$$V_1 = \{(u, v, 0)^T \mid u, v \in P\},$$

$$V_2 = \{(u, 0, w)^T \mid u, w \in P\},$$

则$V_1 + V_2$不是直和.

注 在上例中,

$$(1, 0, 0)^T \in V_1 \cap V_2,$$

所以$V_1 + V_2$不是直和.

例9 设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$为$V$的一组基. 令

$$V_1 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2\},$$

$$V_2 = \mathrm{Span}\{3\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_4\},$$

讨论$V_1 + V_2$是否为直和.

解 设$\boldsymbol{u}\in V_1\cap V_2$, 则有$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$使得

$$\boldsymbol{u} =\lambda_1(\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2)+\lambda_2\boldsymbol{x}_2$$

$$=\mu_1(3\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_4)+\mu_2(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_4),$$

整理得

$$(\lambda_1-\mu_2)\boldsymbol{x}_1+(2\lambda_1+\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{x}_2$$
$$-3\mu_1\boldsymbol{x}_3+(-\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{0},$$

由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$线性无关得

$$\lambda_1-\mu_2=0,\ 2\lambda_1+\lambda_2-\mu_2=0,$$
$$-3\mu_1=0,\ -\mu_1+\mu_2=0,$$

不难验证此方程组只有零解, 即得$V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$, 因此是直和.

定理7 两个子空间的和是直和的充要条件是零向量的分解式唯一.

证明 若$V_1 + V_2$ 是直和, 那么其中所有向量的分解式唯一, 当然零向量的分解式也唯一.

反之, 如果$V_1 + V_2$不是直和, 则有非零元 $\boldsymbol{u} \in V_1 \cap V_2$, 从而

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} + \mathbf{0}\ .$$

即得零向量的分解式不唯一.

定理8 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2 \Leftrightarrow$

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

定理9 V_1, V_2的和是直和$\Leftrightarrow V_1, V_2$的基合在一起为V_1+V_2的基.

证明 设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$和$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s$分别是$V_1$和$V_2$的基, 其中$r=\dim V_1$, $s=\dim V_2$, 则

$$V_1=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\},\ V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s\},$$

于是

$$V_1+V_2=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\ \boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}.$$

若V_1+V_2是直和, 则由定理8知

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1+\dim V_2 = r + s,$$

所以$R(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s) = r + s$, 于是

$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s$线性无关, 从而是$V_1 + V_2$的基.

反之, 若$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s$是$V_1 + V_2$的基, 则

$$\dim(V_1+V_2) = r + s,$$

由定理8即得$V_1 + V_2$是直和.

推论 设V_1是线性空间V的子空间, 则存在V的另一子空间V_2, 使得

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

上式称为V的一个**直和分解**, 称V_1, V_2互为**补空间**.

证明 取V_1的基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$, 扩充为$V$的基

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n.$$

令$V_2 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, 则有$V = V_1 \oplus V_2$.

例10 设V_1和V_2分别为数域P上的齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

和

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间, 证明$P^n = V_1 \oplus V_2$.

注 直和可推广到多个子空间, 定义性质类似.

例如, 设V有一组基$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$, 则有

$$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1\} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_n\}.$$

1.3 线性变换

1.3.1 映射

1.3.2 线性变换的运算

1.3.3 线性变换的值域与核

1.3.4 不变子空间

1.3.5 线性变换的矩阵表示

1.3.1 映射

定义1 设V和W为两个非空集合，如果存在一个法则T，使得对于V中任一元素α，都有W中唯一的元素β与之对应，就称T为从V到W的**映射**，并记

$$T: V \to W, T\alpha = \beta.$$

① 称β为α在T下的**像**；

② 称α为β在T下的**原像**；

③ $T(V) = \{\beta = T\alpha | \alpha \in V\}$称为**像集**

定义2 设V, W是数域P上的线性空间, T是从V到W的映射, 如果对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $\lambda\in P$，总有:

$$T(\alpha+\beta) = T\alpha + T\beta,\quad T(\lambda\alpha) = \lambda T\alpha,$$

就称T是从V到W的**线性映射**.

注: 线性映射就是**保持线性运算**的映射.

例1 取定数域P上的$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$, 定义

$$T: P^n \to P^m,\quad T(x)= \boldsymbol{A}x,$$

则T是线性映射.

例2 $T: P^{n\times n} \to P$, $T(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$ 不是线性映射.

定义3 集合到自身的映射称为**变换**, 线性空间 V 到自身的线性映射称为 V 上的**线性变换**.

例3 取定数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 定义

$$T: P^n \to P^n,\quad T(x)=\boldsymbol{A}x,$$

则 T 是 P^n 上的线性变换.

例4 取定数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 定义

$$T: P^{n\times n} \to P^{n\times n},\quad T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC},$$

则 T 是 P^n 上的线性变换.

例5 在$\mathbf{R}[x]_n$或$\mathbf{R}[x]$中, 定义

$$D(f(x)) = f'(x),$$

则D是线性变换.

例6 在$C[a,b]$中, 定义

$$S(f(x)) = \int_a^x f(x)dx\,,$$

则S是线性变换.

例7 把每个向量都变为 0 的变换是线性变换, 称为零变换, 记作O. 把每个向量都变为自身的变换是线性变换, 称为恒等变换, 记作I.

设T是线性变换, 则:

① $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $T(-\boldsymbol{x}) = -T\boldsymbol{x}$;

② $T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\lambda_k\boldsymbol{x}_k) = \lambda_1 T\boldsymbol{x}_1+\ldots+\lambda_k T\boldsymbol{x}_k$;

③ 若$\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$线性相关, 则$T\boldsymbol{x}_1,\ldots,T\boldsymbol{x}_k$也线性相关.

注 ③的逆命题不正确. 例如, 零变换把线性无关的向量组变为线性相关的向量组.

1.3.2 线性变换的运算

本小节总假设V是数域P上的线性空间

(1) 线性变换的相等

设T_1，T_2是V上的线性变换，若对V中任意元$\boldsymbol{x}$，都有$T_1\boldsymbol{x} = T_2\boldsymbol{x}$, 就称$T_1 = T_2$.

注 设$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$是V的一组基，则$T_1 = T_2$的充要条件是

$$T_1\boldsymbol{x}_j = T_2\boldsymbol{x}_j,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

(2) 线性变换的加法, 数乘, 乘法

设T_1, T_2是V上的线性变换, $k\in P$, 定义

① 加法T_1+T_2:

$$(T_1+T_2)\boldsymbol{x} = T_1\boldsymbol{x} + T_2\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x}\in V;$$

② 数乘kT:

$$(kT)\boldsymbol{x} = kT\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x}\in V;$$

③ 乘法T_1T_2:

$$(T_1T_2)\boldsymbol{x} = T_1(T_2\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in V.$$

注: T_1+T_2, kT, T_1T_2都是线性变换.

线性变换的乘法不交换, 即一般$T_1T_2 \neq T_2T_1$.

例如, 在P^2中定义线性变换

$$T_1\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, T_2\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

则

$$T_1T_2\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix},$$

$$T_2T_1\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = T_2\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

(3) 逆变换

对于变换T, 如果有变换S, 使得

$$TS = ST = I,$$

就称T **可逆**, 并称S为T的**逆变换**, 记作$S=T^{-1}$.

注: 可以证明, 如果T 可逆, 则T的逆变换唯一.

命题 线性变换T的逆变换T^{-1}也是线性变换.

证明 设T是可逆线性变换, 对任意向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$,

令$\alpha = T^{-1}\boldsymbol{x}$, $\beta = T^{-1}\boldsymbol{y}$, 则$\boldsymbol{x} = T\alpha$, $\boldsymbol{y} = T\beta$,

于是

$$T^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T^{-1}(T\alpha+T\beta)$$

$$= T^{-1}[T(\alpha+\beta)] = \alpha+\beta = T^{-1}\boldsymbol{x}+T^{-1}\boldsymbol{y};$$

$$T^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = T^{-1}(\lambda T\alpha)$$

$$= T^{-1}[T(\lambda\alpha)] = \lambda\alpha = \lambda T^{-1}(\boldsymbol{x}).$$

定理1

(1) 线性变换的和、数乘、乘积仍为线性变换;
(2) 可逆变换的逆变换仍为线性变换.

性质：设 T, T_1, T_2, T_3 为线性变换，$\lambda, \mu \in$ P，则

(1) $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$;

(2) $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$;

(3) $T + O = T$;

(4) $T + (-1)T = O$;

(5) $1T = T$;

(6) $\lambda(\mu T) = (\lambda\mu)T$;

(7) $(\lambda+\mu)T = \lambda T + \mu T$;

(8) $\lambda(T_1+T_2) = \lambda T_1+\lambda T_2$;

(9) $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$;

(10) $T I = I T = T$;

(11) $(T_1+T_2)T_3 = T_1T_3+T_2T_3$, $T_3(T_1+T_2) =T_3T_1+T_3T_2$;

其中 O 和 I 分别为零变换和恒等变换.

注

① 记V上的所有线性变换组成的集合为$L(V)$, 则$L(V)$对于线性变换的加法和数乘也构成数域P上的线性空间.

② 线性变换的运算及其性质十分类似于方阵.

1.3.3 线性变换的值域与核

定义4 设T是线性空间V的线性变换.

① T的像所构成的集合

$$T(V) = \{T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V\}$$

是V的子空间, 称为T的**值域**或**像空间**;

② 零向量的所有原像组成的集合

$$\mathrm{Ker}\, T = \{\mathbf{x} | T\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in V\}$$

也是V的子空间，称为T的**核**或**零空间**.

定理2 设T是线性空间V上的线性变换, 则

$$\dim T(V) + \dim \mathrm{Ker}(T)=\dim V.$$

例7 取定数域P上的n阶方阵$\boldsymbol{A}$, 定义线性变换

$$T\colon P^n \to P^n, T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

① $T(V)$为$\boldsymbol{A}$的列生成的空间, 其维数为$R(\boldsymbol{A})$.

② $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解空间,

其维数为$n- R(\boldsymbol{A})$.

因此
$$\begin{aligned}&\dim T(V) + \dim \mathrm{Ker}(T)\\ &= R(\boldsymbol{A}) + n- R(\boldsymbol{A}) = n.\end{aligned}$$

1.3.4 不变子空间

定义5 设T是线性空间V的线性变换, W是V的子空间, 如果

$$T(W) = \{T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in W\} \subseteq W,$$

就称W为T的不变子空间, 简记为T-子空间.

① $T(V)$与$\mathrm{Ker}(T)$是T-子空间.

② $\mathbf{R}[x]_n$是$\mathbf{R}[x]$的子空间, 因为求导后次数降低, 所以$\mathbf{R}[x]_n$是求导变换D的不变子空间.

例8 设T, S是线性空间V上的线性变换, 且

$$TS=ST.$$

证明: $S(V)$与$\mathrm{Ker}(S)$都是T-子空间.

1.3.5 线性变换的矩阵表示

本小节总假设V是数域P上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$是$V$的一组基.

设$T \in L(V)$, $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n$, 计算可知

$$T\mathbf{x} = \xi_1 T\mathbf{e}_1+\xi_2 T\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n T\mathbf{e}_n.$$

注: ① T由$T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \ldots, T\mathbf{e}_n$唯一决定.

② $T\mathbf{e}_2, \ldots, T\mathbf{e}_n$与它们的坐标一一对应.

③ T与$T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \ldots, T\mathbf{e}_n$的坐标一一对应.

把$T\boldsymbol{e}_1, T\boldsymbol{e}_2, \ldots, T\boldsymbol{e}_n$用基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$线性表示,

$$\begin{cases} T\boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ T\boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ T\boldsymbol{e}_n = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{cases}$$

可写成

$$(T\boldsymbol{e}_1, T\boldsymbol{e}_2, \cdots, T\boldsymbol{e}_n)$$

$$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

记$T(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n) = (T\mathbf{e}_1,T\mathbf{e}_2,\ldots,T\mathbf{e}_n)$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n)\boldsymbol{A}.$$

称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{T}$ 在基$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\ldots, \mathbf{e}_n$下的矩阵.

注: ① 线性变换的矩阵的列是基的像的坐标.

② 取定一组基, 则

1) 线性变换的矩阵唯一.

2) 任一方阵可唯一确定一个线性变换.

3) 线性变换和方阵一一对应.

例 9 取多项式空间 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组基 $1, x, x^2, x^3$，计算求导变换 D 在这一组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

定理 3 设 T 是线性空间 V 上的线性变换, T 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 若向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标是ξ, 则 $T\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{A}\xi$.

例10 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$是线性空间$V$的一组基，$T \in L(V)$在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

分别求$T(V)$与Ker T的维数和一组基.

记T,S是V上的线性变换设, 且

$$T(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A},$$

$$S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{B}.$$

计算可得

$$\begin{aligned}&(T+\mathrm{S})(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\\ &=T(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)+S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\\ &=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{B}\\ &=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda T)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\\ = \lambda T(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\\ = \lambda(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}\\ = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\lambda\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

于是$T+S$的矩阵为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, λT的矩阵为$\lambda\boldsymbol{A}$, 即线性变换与方阵的一一对应保持线性运算.

定理 4 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，则

$$\mathrm{L}(V)\cong P^{n\times n}.$$

注：上述同构对应需要先取定一组基.

定理 5 (1)线性变换乘积对应的矩阵的乘积;
(2)可逆变换的矩阵也可逆，且逆变换对应逆矩阵.

设$T \in L(V)$, $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$和$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$分别是$V$的两组基, $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{Q}$, 且

$$T(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A},$$

$$T(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{B},$$

由定理1得

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n) &= T\,[(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{Q}] \\ &= (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \\ &= (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \end{aligned}$$

于是$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

定理 6 设线性变换 T 在不同的两组基下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是前一组基到后一组基的过渡矩阵.

注：可以证明，若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则它们必定是某个线性变换在不同基下的矩阵.

例 11 取多项式空间 $\mathbf{R}[x]_4$ 的两组基:

$$1, x, x^2, x^3$$

和

$$1,\ x-x_0,\ \frac{(x-x_0)^2}{2!},\ \frac{(x-x_0)^3}{3!},$$

计算求导变换 D 在这两组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，并用此例验证它们相似

解 计算得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

过渡矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&-x_0&x_0^2/2&-x_0^3/6\\0&1&-x_0&x_0^2/2\\0&0&1/2&-x_0/2\\0&0&0&1/6\end{pmatrix}.$$

注意$\boldsymbol{Q}$可逆, 再验证

$$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{QB}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -x_0 & x_0^2/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -x_0/2\\ 0 & 0 & 0 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

即得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$.

例12 设$T,S\in L(P^2)$, 且

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};$$

$$S(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

① 求$T+S$在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$下的矩阵;

② 求TS在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$下的矩阵;

③ 求$T\xi$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$下的坐标, 其中$\xi=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$;

④ 求$S\xi$在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$下的坐标.

1.4 内积空间

1.4.1 欧氏空间与酉空间

1.4.2 标准正交基

1.4.3 正交补空间

1.4.1 欧氏空间与酉空间

- 线性空间中只定义了加法和数乘;
- 在向量代数中, 内积是一个重要的概念;
- 内积是向量长度、夹角等概念的基础;
- 在实(复)线性空间中引入内积, 即得内积空间.

定义1 设V是实(复)线性空间，在V中定义一个二元实(复)函数$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，如果对任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}\in V$，$\lambda$, $\mu\in \mathbf{R}(\mathbf{C})$, 都有

① 共轭对称性: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$,

② 线性性: $(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$,

③ 正定性: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, 且$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

就称$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$为$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的内积. 定义了内积的线性空间称为内积空间.

① 实内积空间称为**Euclid空间**, 简称**欧氏空间**;

② 复内积空间称为**酉空间**.

③ 在欧氏空间中, 内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是实数, 从而满足**对称性** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

④ 在酉空间中, 内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是复数, 一般不满足对称性. 但$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$是非负实数.

性质 设V是内积空间, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$.

① $(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = 0$;

② $(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{z}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \bar{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$;

特别地, 若V是欧氏空间, 则

$$(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{z}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

即欧氏空间中的内积满足**双线性性**.

例1 在n维向量空间$\mathbf{R}^n$中, 对向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,$$

定义二元实函数

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

容易验证$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是$\mathbf{R}^n$中的内积, 使得$\mathbf{R}^n$成为一个欧氏空间.

注 此内积称为$\mathbf{R}^n$中的标准内积, 也是默认的内积.

例2 设$C[a, b]$表示$[a, b]$上的所有实连续函数构成的线性空间, 在$C[a, b]$上定义二元实函数

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

则(f, g)是$C[a, b]$中的内积, 使得$C[a, b]$成为一个欧氏空间.

注 在多项式空间$\mathbf{R}[x]$或$\mathbf{R}[x]_n$中, 也可定义此内积, 使得它们成为欧氏空间.

例3 在实线性空间$\mathbf{R}^{m\times n}$中, 对矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n},$$

定义二元实函数

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,b_{ij},$$

其中tr表示方阵的迹(即主对角元素之和),

则$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$为$\mathbf{R}^{m\times n}$中的内积, 使得$\mathbf{R}^{m\times n}$成为一个欧氏空间.

例4 在n维复向量空间$\mathbf{C}^n$中, 对向量

$$\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T, \boldsymbol{y} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)^T,$$

定义二元复函数

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = \xi_1\bar{\zeta}_1 + \xi_2\bar{\zeta}_2 + \cdots + \xi_n\bar{\zeta}_n,$$

其中$\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}} = (\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots, \bar{\zeta}_n)$.

容易验证$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是$\mathbf{C}^n$中的内积, 使得$\mathbf{C}^n$成为一个酉空间.

注 此内积称为酉空间$\mathbf{C}^n$中的标准内积, 也是默认内积.

定义2 称

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

为向量***x***的**范数**或**长度**, 并称范数为1的向量为**单位向量**.

注 对任一非零向量***x***,

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

是单位向量, 称为把***x***单位化.

在向量代数中, 两个非零向量**x**,**y**的夹角θ满足

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||}.$$

问 在内积空间中, 是否可按此定义夹角?

答 ① 酉空间不行, 因为$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$可能为复数.

② 欧氏空间可以, 但要先证明

$$\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||} \in [-1,1].$$

定理1 (Cauchy-Schwarz不等式) 对内积空间V中任意两个元$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, 都有

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|,$$

且等号成立当且仅当$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$线性相关.

证明 若$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$线性相关, 则不妨设$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{y}$, 于是

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = (\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\overline{(\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \\ &= (\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\overline{\lambda(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} = (\lambda\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2\cdot\|\boldsymbol{y}\|^2.\end{aligned}$$

若$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$线性无关, 则$\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, 且对任意$\lambda \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$, 都有$\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, 所以

$$0 < (\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y})$$

$$=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-\lambda(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\bar{\lambda}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),$$

取$\lambda = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})/(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$代入得

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 > 0,$$

从而$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

注 在不同的内积空间中, Cauchy-Schwarz不等式有不同的形式.

例5 在欧氏空间$\mathbf{R}^n$中, Cauchy-Schwarz不等式为

$$|\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n|$$
$$\leq\sqrt{\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\cdots+\boldsymbol{x}_n^2}\sqrt{\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2+\cdots+\boldsymbol{y}_n^2},$$

其中$\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k\in\mathbf{R}$, $k = 1, 2,\ldots,n$.

例6 在欧氏空间C[a,b]中, Cauchy-Schwarz不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right|}\cdot\sqrt{\left|\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right|}.$$

例7 在酉空间$\mathbf{C}^n$中, Cauchy-Schwarz不等式为

$$\begin{aligned}&|\xi_1\overline{\zeta_1}+\xi_2\overline{\zeta_2}+\cdots+\xi_n\overline{\zeta_n}|\\ &\le\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}\\ &\cdot\sqrt{|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2},\end{aligned}$$

其中ξ_k, $\zeta_k\in\mathbf{C}$, $k = 1, 2,\ldots,n$.

在欧氏空间中，两个非零向量**x**，**y**之间的夹角θ定义为

$$\theta = \arccos \frac{(x, y)}{||x||\ ||y||}.$$

定义3 在内积空间(包括酉空间)中，如果

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

就称**x**与**y**正交，记作**x**⊥**y**.

注 零向量与任一向量正交.

范数有如下性质:

① 非负性:$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

② 齐次性: $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$或$\mathbf{C}$;

③ 三角不等式: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$,

可推广为

$$\|\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_m\| \leq \|\boldsymbol{x}_1\| + \|\boldsymbol{x}_2\| + \cdots + \|\boldsymbol{x}_m\|;$$

④ 勾股定理: 如果$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交, 那么

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

1.4.2 标准正交基

定义4 内积空间中,

① 一组两两正交的非零向量称为**正交向量组**,

② 一组两两正交的单位向量称为**标准正交向量组**.

定理2 正交向量组必线性无关.

证明 设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$为正交向量组, 且

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \dots + \lambda_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0},$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$是实数或复数.

两边与$\boldsymbol{x}_k$作内积得

$$\lambda_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k) = 0,$$

再由$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{0}$可知$(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k) > 0$, 所以$\lambda_k = 0$, 即得.

定义5 由正交向量组构成的基称为**正交基**, 由标准正交向量组构成的基称为**标准正交基**.

命题1 设V是n维内积空间, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in V$, 则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$是标准正交基 $\Leftrightarrow$

$$\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1,2, \ldots n).$$

命题 设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$是标准正交基.

① 设

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

等式两边与$\boldsymbol{e}_k$作内积可得$\lambda_k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)$, 即

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

② 再设 $\boldsymbol{y} = \mu_1\boldsymbol{e}_1 + \mu_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \mu_n\boldsymbol{e}_n$, 则计算可得

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda_1\bar{\mu}_1 + \lambda_2\bar{\mu}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{\mu}_n.$$

注 若记$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{\mu}$, 则

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{\lambda}.$$

定理3 内积空间中必定存在标准正交基.

证明 以下给出从普通基构造标准正交基的具体过程, 称为**Schmidt**正交单位化.

设$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$为内积空间$V$的一组基,

① 令$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1$, 由

$$(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) = (\boldsymbol{x}_2 - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) = 0$$

得$\lambda_1 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u}_1)/(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1)$, 即$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u}_1)}{(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1)} \boldsymbol{u}_1$,

这样构造的$\boldsymbol{u}_2$与$\boldsymbol{u}_1$正交, 且它们都非零, 从而是正交向量组.

再令

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{x}_3-\lambda_1\boldsymbol{u}_1-\lambda_2\boldsymbol{u}_2,$$

代入$(\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_1)=(\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_2)=0$得

$$\lambda_1=(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_1)/(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1),\ \ \lambda_2=(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_2)/(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_2),$$

即

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_1)}{(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_2)}{(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_2)}\boldsymbol{u}_2.$$

这样构造的$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$两两正交且都非零，从而是正交向量组.

重复以上过程可构造出

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{u}_1)}{(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1,$$

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_1)}{(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{u}_2)}{(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_2)}\boldsymbol{u}_2,\cdots,$$

$$\boldsymbol{u}_{r+1}=\boldsymbol{x}_{r+1}-\frac{(\boldsymbol{x}_{r+1},\boldsymbol{u}_1)}{(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{x}_{r+1},\boldsymbol{u}_r)}{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_r)}\boldsymbol{u}_r.$$

直到$r+1=n$, 可得正交向量组$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$.

② 令$\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{u}_j/\|\boldsymbol{u}_j\|$, 得标准正交基

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n.$$

例8 在欧氏空间$\mathbf{R}^5$中, 记

$$W = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求W的一组标准正交基.

解 正交化得

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

例9 在欧氏空间$\mathbf{R}[t]_3$中定义内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

求$\mathbf{R}[t]_3$的一组标准正交基.

解 取$\mathbf{R}[t]_3$的基$\boldsymbol{x}_1=1, \boldsymbol{x}_2=t, \boldsymbol{x}_3=t^2$.

正交化得$u_1=1, u_2=t-\frac{1}{2}, u_3=t^2-t+\frac{1}{6}$,

单位化得

$$e_1=1, e_2=\sqrt{3}(2t-1),$$
$$e_3=\sqrt{5}(6t^2-6t+1).$$

定义6 复方阵$\boldsymbol{A}$若满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{E},$$

则称$\boldsymbol{A}$为酉矩阵, 其中$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$表示$\boldsymbol{A}$的共轭转置.

① 实酉矩阵满足$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{E}$, 称为正交矩阵.

② n阶复方阵为酉矩阵⇔其列向量(行向量)为$\mathbf{C}^{n}$中两两正交的单位向量.

③ n阶实方阵为正交矩阵⇔其列向量(行向量)为$\mathbf{R}^{n}$中两两正交的单位向量.

定理4 酉空间(欧氏空间)V中标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵(正交矩阵).

证明 设$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$和$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$分别$V$的两组标准正交基, 且

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}.$$

将$\boldsymbol{A}$按列分块为$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n)$, 则

$$\boldsymbol{u}_i = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}_i,\ \ j = 1,2, ,\ldots,n.$$

由前标准正交基的性质可知

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{A}_j^H \boldsymbol{A}_i.$$

$$(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{A}_k^H \boldsymbol{A}_j.$$

又

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是***A***的列是两两正交的单位向量, 即得***A***是酉矩阵(正交矩阵).

1.4.3 正交补空间

定义7 设V_1, V_2是内积空间V的子空间.

① 如果向量$\boldsymbol{x}$与V_1中每个向量正交, 则称$\boldsymbol{x}$与V_1正交, 记为$\boldsymbol{x}\perp V_1$.

② 如果V_1中每个向量与V_2中的每个向量都正交, 则称V_1与V_2正交, 记为$V_1\perp V_2$.

注 ① $\boldsymbol{x}\perp V_1$的充要条件是$\boldsymbol{x}$与V_1一组基正交;

② $V_1\perp V_2$的充要条件是V_1的一组基与V_2的一组基正交.

定理5 两个正交的子空间之和是直和.

证明 设$V_1 \perp V_2$, 如果$\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$, 则

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0,$$

即得$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 所以$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{0}\}$, 得$V_1 + V_2$为直和.

定义8 设V_1是内积空间V的子空间. 若有另一个子空间 V_2满足

$$V_1 + V_2 = V, \quad V_1 \perp V_2,$$

称V_2是V_1的正交补空间, 记作$V_2 = V_1^{\perp}$.

定理6 每个子空间都有唯一的正交补空间.

证明 取V_1的标准正交基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$, 扩充为$V$的基$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

正交单位化得V的标准正交基

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n .$$

记$V_2 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, 则

$$V_1 + V_2 = V, \quad V_1 \perp V_2,$$

即得$V_2 = V_1^{\perp}$.

设V_2与V_3都是V_1的正交补, 则

$$V=V_1\oplus V_2=V_1\oplus V_3.$$

对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V_2$, 则有$\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_3\in V_3$使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

注意到$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_3$, 于是

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1),\end{aligned}$$

即得$\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, 从而$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_3\in V_3$, 因此$V_2\subseteq V_3$.

同理可证$V_3\subseteq V_2$, 即得$V_2=V_3$.

注 子空间的标准正交基可扩充为全空间的标准正交基.

推论1 设V_1是内积空间V的子空间, 则

$$V_1^{\perp}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V|\boldsymbol{\alpha}\perp V_1\}.$$

例 10 在欧氏空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$中，定义内积

$$(\mathrm{A},\mathrm{B})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij},\mathrm{A}=(a_{ij})_{2\times 2},\mathrm{B}=(b_{ij})_{2\times 2},$$

令 $W=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\}$，其中

$$\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathrm{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

① 求 $W^{\perp}$的基; ② 求 $W^{\perp}$的标准正交基.

解 $W^{\perp}$的一组基为

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 正交单位化得 $W^{\perp}$的一组标准正交基

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_4=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

1.5 正交变换与酉变换

定义 1 设 T 是欧氏(酉)空间 V 上的线性变换，若 T 保持 V 中向量的内积不变，即对任何 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in V$，都有

$$(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

则称 T 为正交(酉)变换.

注：正交(酉)变换首先必须是线性变换.

定理 1 欧氏(酉)空间 V 中的线性变换 T 为正交(酉)变换的充要条件是 T 保持 V 中向量的长度不变，即

$$\|T\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall x \in V.$$

证明 若 T 为正交变换，则

$$\|T\boldsymbol{x}\|^2 = (T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

故 T 保持向量长度不变.

反之, 若T保持欧氏空间V中向量的长度不变,

则对任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$\|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2,$$

$$\|Tx\|^2 = \|x\|^2, \|Ty\|^2 = \|y\|^2,$$

$$\|Tx+Ty\|^2 = (Tx+Ty, Tx+Ty)$$

$$= \|Tx\|^2 + 2(Tx, Ty) + \|Ty\|^2,$$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y)$$

$$= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

于是$(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 故$T$为正交变换.

对酉变换, 分别对$\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{x} - \mathrm{i}\boldsymbol{y}$讨论即可.

定理2 线性变换T为正交(酉)变换的充要条件是T把V中的标准正交基变为标准正交基.

证明 设$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\dots, \boldsymbol{e}_n$为欧氏(酉)空间$V$的一组标准正交基.

若T为正交(酉)变换, 则

$$\left(Te_i, Te_j\right) = \left(e_i, e_j\right)$$
$$= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故$T\boldsymbol{e}_1, T\boldsymbol{e}_2,\dots, T\boldsymbol{e}_n$为标准正交基.

反之, 若$T\boldsymbol{e}_1, T\boldsymbol{e}_2, \ldots, T\boldsymbol{e}_n$也是标准正交基, 设

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

$$\boldsymbol{y} = \mu_1\boldsymbol{e}_1 + \mu_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \mu_n\boldsymbol{e}_n,$$

则

$$T\boldsymbol{x} = \lambda_1 T\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 T\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n T\boldsymbol{e}_n,$$

$$T\boldsymbol{y} = \mu_1 T\boldsymbol{e}_1 + \mu_2 T\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \mu_n T\boldsymbol{e}_n,$$

计算得

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda_1\bar{\mu}_1 + \lambda_2\bar{\mu}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{\mu}_n$$
$$= (T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}),$$

即T保持内积, 故为正交(酉)变换.

定理3 线性变换T为正交(酉)变换的充要条件是T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵(酉矩阵).

证明 设$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$为$V$的标准正交基, 且

$$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)A.$$

如果T为正交(酉)变换, 则由上一节定理可知$T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \ldots, T\mathbf{e}_n$也是$V$的标准正交基,

从而A就是从$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$到$T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \ldots, T\mathbf{e}_n$的过渡矩阵, 因此是正交矩阵(酉矩阵).

反之, 设$\boldsymbol{A}$为正交(酉)矩阵. 设

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\lambda,$$

则

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\lambda},$$

注意$T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{A}\lambda)$, 故

$$\|T\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{A\lambda})^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{A\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A\lambda}$$
$$= \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\lambda} = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

即T保持向量长度不变, 故T为正交(酉)变换.

例1 在欧氏空间**R**^{3}中, 定义变换

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\gamma\cos\theta - y\sin\theta - z\sin\gamma\cos\theta \\ x\cos\gamma\sin\theta + y\cos\theta - z\sin\gamma\sin\theta \\ x\sin\gamma + z\cos\gamma \end{pmatrix},$$

证明*T*是正交变换.

证明 注意到

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\theta & -\sin\theta & \sin\gamma\cos\theta \\ \cos\gamma\sin\theta & \cos\theta & \sin\gamma\sin\theta \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

从而*T*是线性变换.

计算得

$$\left\|T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$=(x\cos\gamma\cos\theta-y\sin\theta-z\sin\gamma\cos\theta)^2$$

$$+(x\cos\gamma\sin\theta+y\cos\theta-z\sin\gamma\sin\theta)^2$$

$$+(x\sin\gamma+z\cos\gamma)^2$$

$$=x^2+y^2+z^2$$

即T保持向量长度不变, 从而是正交变换.

注意到T 在$\mathbf{R}^3$的标准正交基

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)^T, \boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)^T, \boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)^T$$

下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta \\ \cos\gamma\sin\theta & \cos\theta & -\sin\gamma\sin\theta \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

计算可知$\boldsymbol{A}$为正交矩阵, 于是T为正交变换.

注：① 保持向量长度不变的变换未必是线性变换，从而未必是正交变换.

② 保持内积不变的变换必定是线性变换，从而是正交变换.

例 2 设 α 是欧氏空间 V 中的一个单位向量，定义变换

$$Tx = x - 2(x, \alpha)\alpha,$$

证明：① T 是线性变换；② T 是正交变换.