

1 多项式矩阵与 Jordan 标准形

- Jordan 标准形简介
- 多项式的相关概念和性质
- 多项式矩阵的初等变换与 Smith 标准形
- 数字矩阵相似的条件与 Jordan 标准形
- Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

Jordan 标准形简介

本节所有讨论都在复数域 $\mathbf{C}$ 上进行.

Definition (Jordan 块)

形如

$$J(\lambda_0, r) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{r \times r}$$

的矩阵称为一个 r 阶 Jordan 块, 其中 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$.

Jordan 标准形简介

Definition (Jordan 形矩阵)

由若干个 Jordan 块组成的准对角阵

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & & \\ & J(\lambda_2, r_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s, r_s) \end{pmatrix}$$

称为一个 Jordan 形矩阵, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbf{C}$.

注: 对角阵可以看作每个 Jordan 块都是 1 阶的 Jordan 形矩阵.

Jordan 标准形简介

Theorem

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 则 A 与某个 Jordan 形矩阵 J 相似, 并且在不计 Jordan 块次序的前提下, J 由 A 唯一决定, 称为 A 的 **Jordan 标准形**.

- ① Jordan 块和 Jordan 形矩阵都是特殊的上三角矩阵.
- ② A 的 Jordan 标准形的主对角元就是其全部特征值, 重根按重数计算.
- ③ 对角阵是 Jordan 标准形的特例.

Jordan 标准形简介

有文献把 Jordan 块定义为

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda_0 & \\ & & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

也有类似的结论.

1 多项式矩阵与 Jordan 标准形

- Jordan 标准形简介
- 多项式的相关概念和性质
- 多项式矩阵的初等变换与 Smith 标准形
- 数字矩阵相似的条件与 Jordan 标准形
- Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

多项式的相关概念和性质

Definition (一元多项式)

设 λ 是一个符号, P 是数域, 称

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

为数域 P 上的一元多项式, 其中 $a_n, \dots, a_1, a_0 \in P$.

- ① 数域 P 上的全体一元多项式组成集合记作 $P[\lambda]$.
- ② 若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n \lambda^n$ 为首项, 并称 f 的次数为 n , 记作 $\partial f = n$ 或 $\deg f = n$.
- ③ 如果 f 的每项系数都为 0, 则称 f 为零多项式, 零多项式不定义次数.

多项式的相关概念和性质

Property

设 $f, g, f \pm g \in P[\lambda]$ 都非零, $c \in P$ 非零, 则

- ① $\partial(f \pm g) \leq \max\{\partial f, \partial g\},$
- ② $\partial(cf) = \partial f,$
- ③ $\partial(fg) = \partial f + \partial g.$

Definition

设 $f, g \in P[\lambda]$, 如果 f, g 的各项系数都对应相等, 则称 $f = g$.

多项式的相关概念和性质

Definition (整除)

设 $f, g \in P[\lambda]$, 如果存在 $h \in P[\lambda]$ 使得

$$f = gh,$$

就称 g 整除 f , 记作 $g|f$, 此时称 g 是 f 的**因式**, f 是 g 的**倍式**.

- ① $f|f$, $f|0$, $c|f$, 其中 $f \in P[\lambda]$, $c \in P$ 非零.
- ② 零多项式**只能**整除零多项式.
- ③ 设 $g|f$, 且 $c, d \in P$ 非零, 则 $cg|df$.
- ④ 设 $h|g, g|f$, 则 $h|f$.

多项式的相关概念和性质

Definition (带余除法)

设 $f, g \in P[\lambda]$, 且 $g \neq 0$, 则存在唯一的 $q, r \in P[\lambda]$ 使得

$$f = qg + r,$$

其中 q 称为商, r 称为余式, 且 $r = 0$ 或 $\partial r < \partial g$,

注: $r = 0 \Leftrightarrow g|f$.

多项式的相关概念和性质

Definition (最大公因式)

设 $f, g \in P[\lambda]$.

- ① 如果 $d \in P[\lambda]$ 满足 $d|f, d|g$, 则称 d 是 f, g 的公因式.
- ② 如果 f, g 的某个公因式 d 能被 f, g 的所有公因式整除, 就称 d 为 f, g 的最大公因式.
- ① f, g 的最大公因式一定存在.
- ② 两个零多项式的最大公因式是零多项式 (唯一).
- ③ 两个不全为零的多项式最大公因式非零, 并且在相差一个非零常数倍的意义下唯一.

多项式的相关概念和性质

Property

设 $f, g \in P[\lambda]$ 不全为零, 则 f, g 的首一最大公因式**存在唯一**, 记作 (f, g)

- 首一的含义是首项系数等于 1.
- 公因式和最大公因式可推广至 3 个以上多项式的情形.

1 多项式矩阵与 Jordan 标准形

- Jordan 标准形简介
- 多项式的相关概念和性质
- 多项式矩阵的初等变换与 Smith 标准形
- 数字矩阵相似的条件与 Jordan 标准形
- Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

λ -矩阵及其运算

Definition

以数域 P 上的一元多项式为元素的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}(\lambda) & a_{s2}(\lambda) & \cdots & a_{sn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

称为多项式矩阵, 也称为 λ -矩阵, 其中 $a_{ij}(\lambda) \in P[\lambda]$.

注: 设 $A \in P^{n \times n}$, 则 $\lambda E - A$ 是 λ 矩阵, 称为 A 的**特征矩阵**.

λ -矩阵及其运算

- ① 一般用 $A(\lambda), B(\lambda), \dots$ 来表示 λ -矩阵.
- ② 称以数为元素的矩阵为数字矩阵; 数字矩阵可看作 λ -矩阵的特例.
- ③ 记 P 上全体 $s \times n$ 的 λ -矩阵组成的集合为 $P[\lambda]^{s \times n}$.
- ④ λ -矩阵可以做加法, 数乘, 乘法, 运算规律与数字矩阵一致, 如结合律, 分配律等.
- ⑤ 对 $n \times n$ 的 λ -矩阵, 可定义行列式 (结果是多项式), 且乘积的行列式等于行列式等乘积.

λ -矩阵及其运算

Definition

若 $A(\lambda)$ 有一个 r 级子式非零, 且所有 $r+1$ 级子式全为零, 则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r , 记作

$$R(A(\lambda)) = r.$$

注: 对任意 $A \in P^{n \times n}$, 总有 $R(\lambda E - A) = n$.

λ -矩阵及其运算

Definition

设 $A(\lambda) \in P[\lambda]^{n \times n}$, 如果存在 $B(\lambda) \in P[\lambda]^{n \times n}$ 使得

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E,$$

则称 $A(\lambda)$ 可逆, $B(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的逆, 记作 $A^{-1}(\lambda)$.

Theorem

设 $A(\lambda) \in P[\lambda]^{n \times n}$, 则 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow |A(\lambda)|$ 是**非零的数**.

注: 设 $A \in P^{n \times n}$, 则 $R(\lambda E - A) = n$, 但它不可逆.

λ -矩阵的初等变换

Definition

以下 3 种变换称为 λ -矩阵的初等变换.

- ① 交换两行 (列),
- ② 某一行 (列) 乘以非零常数 c ;
- ③ 某一行 (列) 的 $f(\lambda)$ 倍加到另一行 (列) 上.

Property

初等变换都可逆, 且逆变换还是初等变换.

λ -矩阵的等价

Definition

如果 $A(\lambda)$ 经过若干次初等变换化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

- λ -矩阵的等价满足自反性, 对称性, 传递性;
- $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 $\Rightarrow R(A(\lambda)) = R(B(\lambda))$, 但反之不正确.

Smith 标准形

Theorem

任一非零 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于以下形式的矩阵:

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{pmatrix} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad r = R(A(\lambda)),$$

其中 $d_1, \dots, d_r$ 是首一多项式, 满足连续整除: $d_i | d_{i+1}$.
并且 $d_1, \dots, d_r$ 由 $A(\lambda)$ 唯一确定.

Smith 标准形

- ① $d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子,
- ② $S(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形.

Corollary

两个同型的 λ -矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 它们的不变因子相同.

Smith 标准形

Smith 标准形的计算方法:

- ① 求出 $A(\lambda)$ 中所有非零元的首一最大公因式, 即得 $d_1(\lambda)$;
- ② 用初等变换化

$$A(\lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & O \\ O & A_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

注意 $d_1(\lambda)$ 整除 $A_1(\lambda)$ 中每个元;

- ③ 再对 $A_1(\lambda)$ 重复上述步骤, 反复如此即可.

Smith 标准形

Example

用初等变换化

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

为 Smith 标准形并写出其不变因子.

行列式因子

Definition (行列式因子)

设 $A(\lambda)$ 的秩为 r , 对每个 $1 \leq k \leq r$, 称 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶非零子式的首一最大公因式为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子, 记作 $D_k(\lambda)$.

Example

$D_1(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 中所有非零元的首一最大公因式, 因此 $D_1(\lambda) = d_1(\lambda)$.

Example

设 $A \in P^{n \times n}$, 则 $R(\lambda E - A) = n$, 且 $D_n(\lambda) = |\lambda E - A|$.

行列式因子

Property

等价的 λ 矩阵有相同的行列式因子.

Corollary

$D_k(\lambda) = d_1(\lambda) \cdots d_k(\lambda)$, 反之,

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}, \quad k = 2, \dots, r.$$

Corollary

两个同型 λ -矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的行列式因子.

行列式因子

注: $D_1(\lambda)|D_2(\lambda)|\cdots|D_r(\lambda)$.

Example

求

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda + 1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

的行列式因子和不变因子.

Example

求 $\lambda E - J(\lambda_0, r)$ 的行列式因子与不变因子.

初等因子

Definition (初等因子)

把 $A(\lambda)$ 的不变因子分解为一次因式的幂的乘积, 所得的一次因式的幂称为 $A(\lambda)$ 的初等因子.

注: 初等因子往往在复数域 $\mathbf{C}$ 上讨论.

初等因子

Example

设 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$\lambda - 1, (\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1)^2,$$

则 $A(\lambda)$ 的初等因子为

$$\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, \lambda + 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 1)^2, (\lambda + i)^2, (\lambda - i)^2.$$

- ① $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ 不要分解为 $(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$.
- ② 初等因子可能会重复, 需重复计算.

初等因子

问：由初等因子能否求出不变因子？

Example

设 $A(\lambda)$ 的初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2,$$

求其不变因子.

- “初等因子 + 秩” 可以求出不变因子.
- 不变因子有连续整除关系.

初等因子

Property

不变因子与“初等因子 + 秩”互相唯一决定.

Corollary

两个同型 λ 矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的初等因子和秩.

Example

求 $\lambda E - J(\lambda_0, r)$ 的初等因子.

初等因子

Property

分块对角 λ 矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

的初等因子是 $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots, A_s(\lambda)$ 初等因子的合并.

初等因子

Example

设 Jordan 形矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & & \\ & J(\lambda_2, r_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s, r_s) \end{pmatrix},$$

则 $\lambda E - J$ 的初等因子为 $(\lambda - \lambda_i)^{r_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$.

1 多项式矩阵与 Jordan 标准形

- Jordan 标准形简介
- 多项式的相关概念和性质
- 多项式矩阵的初等变换与 Smith 标准形
- 数字矩阵相似的条件与 Jordan 标准形
- Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

数字矩阵相似的条件

设 $A, B \in P^{n \times n}$, 以下用 $A \sim B$ 表示 A 与 B 相似.

Theorem

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价.

注: 简称 $\lambda E - A$ 的 λ 因子为 A 的 λ 因子.

Corollary

$A \sim B \Leftrightarrow$ 它们有相同的不变因子 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的行列式因子 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的初等因子.

注: 对任意 $A \in P^{n \times n}$, 总有 $R(\lambda E - A) = n$.

数字矩阵相似的条件

Example

设 $A \in P^{n \times n}$, 证明: $A \sim A^T$.

- ① Jordan 块 $J(\lambda_0, r)$ 与它的初等因子 $(\lambda - \lambda_0)^r$ 互相唯一确定.
- ② 如不计 Jordan 块次序, 则 Jordan 形矩阵与它的初等因子互相唯一确定.

Jordan 标准形

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$.

$$\begin{array}{ccc} A & \sim & J=? \\ \downarrow & & \updownarrow \\ \text{初等因子} & = & \text{初等因子} \end{array}$$

Jordan 标准形

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$.

- ① 计算 A 的初等因子;
- ② 写出每个初等因子对应的 Jordan 块;
- ③ 这些 Jordan 块排成的分块对角阵 J 就是 A 的 Jordan 标准形.
- ④ 具体的, 若 A 的初等因子为 $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}, j = 1, \dots, s$, 则 A 的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s, r_s) \end{pmatrix}.$$

Jordan 标准形

Example

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- ① 求 A 的 Jordan 标准形 J .
- ② 求可逆方阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = J$

注: Q 不唯一.

1 多项式矩阵与 Jordan 标准形

- Jordan 标准形简介
- 多项式的相关概念和性质
- 多项式矩阵的初等变换与 Smith 标准形
- 数字矩阵相似的条件与 Jordan 标准形
- Cayley-Hamilton 定理与最小多项式

Cayley-Hamilton 定理

设 $A \in P^{n \times n}$, $f(\lambda) = a_m \lambda^m + \cdots + a_1 \lambda + a_0$, 则

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E \in P^{n \times n},$$

称为 A 的多项式.

Theorem (Cayley-Hamilton 定理)

设 $A \in P^{n \times n}$, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$, 则 $f(A) = O$.

Cayley-Hamilton 定理

Example

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $g(A) = A^8 - 2A^6 + A^5 + 3A^3 - 3A + E$.

Proof.

计算知 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$, 做带余除法

$$g(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) - 20\lambda^2 + 3\lambda + 22,$$

Cayley-Hamilton 定理

Proof.

于是

$$\begin{aligned} g(A) &= -20A^2 + 3A + 22E \\ &= \begin{pmatrix} -15 & -74 & 23 \\ 20 & 5 & 17 \\ -17 & -40 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

最小多项式

以下设 $A \in P^{n \times n}$.

Definition (零化多项式)

设 $g(\lambda) \in P[\lambda]$. 如果 $g(A) = O$, 则称 $g(\lambda)$ 是 A 的一个零化多项式.

Definition (最小多项式)

A 次数最小的首一零化多项式称为 A 的最小多项式.

Property

- ① 最小多项式整除任一零化多项式.
- ② 最小多项式存在唯一.

最小多项式

Example

求 $J(\lambda_0, r)$ 的最小多项式

Property

A 的任一特征值都是其最小多项式的根.

Example

求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

最小多项式

Property

A 的最后一个不变因子就是其最小多项式.

Example

求

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

的最小多项式.

最小多项式

Example

设复方阵 A 的特征多项式和最小多项式分别为

$$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^3, m(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2,$$

求 A 的 Jordan 标准形.

Example

设 A 是 4 阶复方阵, 如果 A 的最小多项式为 λ^2 , 那么在不计 Jordan 块次序的前提下, A 的 Jordan 标准形有几种可能?

最小多项式

Property

如果 $A \sim B$, 那么 A, B 的最小多项式相同.

Theorem

A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 的最小多项式无重根.