第三章 矩阵的范数与幂级数

3.1 向量范数
3.2 矩阵范数
3.3 矩阵的算子范数
3.4 矩阵序列
3.5 矩阵幂级数的收敛性

3.1 向量范数

定义1 设V是数域P上的线性空间，如果对V中任意向量$\boldsymbol{x}$，都有一个非负实数$\|\boldsymbol{x}\|$与之对应，且满足:

① 正定性: $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| > 0$,

② 齐次性: $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$, $\lambda \in P$,

③ 三角不等式: $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$,

就称$\|\boldsymbol{x}\|$是向量$\boldsymbol{x}$的范数，并称定义了范数的线性空间为赋范空间.

注 内积空间必定是赋范空间, 但反之未必.

向量范数的性质:

① $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

② 若 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 则$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$为单位向量;

③ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$.

例1 设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|,$$

证明$\|\boldsymbol{x}\|_1$为向量范数. 称此范数为**1-范数**.

证明 ①若 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 则存在某个 $\xi_j\neq 0$, 于是

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|$$

$$\geq|\xi_j|>0;$$

② 计算可得

$$\|\lambda \boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda \xi_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\lambda| \cdot |\xi_k|$$

$$= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$$

$$= |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_1;$$

③ 再设 $\boldsymbol{y} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$, 则

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \zeta_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (|\xi_k| + |\zeta_k|)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

例2 设$\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2},$$

证明$\|\mathbf{x}\|_2$为向量范数. 称此范数为**2-范数**.

证明 $\|\mathbf{x}\|_2$就是$\mathbf{C}^n$中**标准内积**所定义的范数,即

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}.$$

例3 设 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in \mathbf{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |\xi_k|,$$

证明 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 为向量范数, 此范数称为**∞-范数**.

证明 ① 当 $\boldsymbol{x}$ 非零时, ξ_k 不全为零, 因此 $|\xi_k|$ 中至少有一个大于零, 于是

$$\max_{0\le k\le n} |\xi_k| > 0.$$

② 计算可得

$$\|\lambda \boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |\lambda \xi_k| = \max_{0\le k\le n} |\lambda|\cdot|\xi_k|$$
$$= |\lambda| \max_{0\le k\le n} |\xi_k| = |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

③ 再设 $\boldsymbol{y} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$, 则

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |\xi_k + \zeta_k|$$
$$\le \max_{0\le k\le n} (|\xi_k| + |\zeta_k|)$$
$$\le \max_{0\le k\le n} |\xi_k| + \max_{0\le k\le n} |\zeta_k|$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty.$$

注 在$\mathbf{C}^n$中, 对 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < +\infty,$$

可以证明$\|\boldsymbol{x}\|_p$为向量范数, 称之为***p*-范数**.

命题 $\lim\limits_{p\to+\infty}\|\boldsymbol{x}\|_p=\|\boldsymbol{x}\|_\infty.$

证明 设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)^T$, 若 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 则结论显然.

若 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 则 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty>0$, 且

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|\boldsymbol{x}\|_\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\xi_k|^p}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\boldsymbol{x}\|_\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\xi_k|^p}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

注意到$0\le|\xi_k|\le\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, 且存在某个 k_0使得 $\xi_{k_0}=\|\boldsymbol{x}\|_\infty$, 所以

$$1\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|\xi_k|^p}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p}\le n$$

于是

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty\le\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{p}}\le\sqrt[p]{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_p \le \sqrt[p]{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

由于

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{n} = 1,$$

故有

$$\lim_{p\to+\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

例4 设$\|\cdot\|_a$是$\mathbf{C}^m$上的一种向量范数, $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$的列线性无关, 对$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$, 定义$\|\boldsymbol{x}\|_b=\|\boldsymbol{Ax}\|_a$, 证明$\|\boldsymbol{x}\|_b$是$\mathbf{C}^n$中的向量范数.

证明 ① 因为$\boldsymbol{A}$的列线性无关, 所以当$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$时, 有$\boldsymbol{Ax} \neq \mathbf{0}$, 即得

$$\|\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{Ax}\|_a > 0.$$

② 计算得

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})\|_a = \|\lambda\boldsymbol{Ax}\|_a$$
$$= |\lambda|\,\|\boldsymbol{Ax}\|_a = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_b.$$

③ 再设 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$, 则

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_b = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_a = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|_a$$

$$\leq \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|_a = \|\boldsymbol{x}\|_b + \|\boldsymbol{y}\|_b.$$

定义2 设 $\|\cdot\|_a$和 $\|\cdot\|_b$是线性空间V中的两种范数, 若存在正数M, m, 使对任意$\boldsymbol{x}\in V$,

$$m\|\boldsymbol{x}\|_b \leq \|\boldsymbol{x}\|_a \leq M\|\boldsymbol{x}\|_b,$$

就称 $\|\cdot\|_a$与 $\|\cdot\|_b$ 等价.

引理 范数的等价关系满足反身性, 对称性,传递性.

定理2有限维线性空间中任意两种范数都等价.

证明 由对称性和传递性可知只须证明任意范数都与特定范数$\|\cdot\|_a$等价即可.

取定V基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$, 设 $\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\boldsymbol{e}_n$, 定义

$$\|x\|_a=\sqrt{|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2}.$$

设$\|\cdot\|$是V中的范数, 先证明$\|\boldsymbol{x}\|$是$(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$的连续函数.

先证明$\|\boldsymbol{x}\|$是$(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$的连续函数.

设 $\boldsymbol{y} = \zeta_1\mathbf{e}_1+ \zeta_2\mathbf{e}_2+\ldots+\zeta_n\mathbf{e}_n$, 则

$$0 \le \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

$$=\|(\xi_1 - \zeta_1)\mathbf{e}_1+\ldots+(\xi_n - \zeta_n)\mathbf{e}_n\|$$

$$\le |\xi_1 - \zeta_1|\,\|\mathbf{e}_1\|+\ldots+|\xi_n - \zeta_n|\,\|\mathbf{e}_n\|$$

$$\to 0 \ (\xi_k \to \zeta_k,\ k = 1, \ldots, n).$$

即得.

已证$\|\boldsymbol{x}\|$是$(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$的连续函数.

注意到

$$S=\left\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}\|_a=\sqrt{\xi_1^2+\cdots\xi_n^2}=1\right\}$$

是**有界闭集**, 因此

① $\|\boldsymbol{x}\|$在S上有最大值M和最小值m,

② S中没有零向量, 于是$m>0$, 即有

$$m\le\|\boldsymbol{x}\|\le M,\ \boldsymbol{x}\in S.$$

当$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$时, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\in S$, 于是

当$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$时, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \in S$, 于是

$$m \leq \left\| \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \right\| = \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \leq M,$$

即

$$m\|\boldsymbol{x}\|_a \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq M\|\boldsymbol{x}\|_a.$$

而当$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时, $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_a = 0$, 即得.

3.2 矩阵范数

- $\mathbf{C}^{m\times n}$ 可以看作mn维向量空间, 可自然定义 $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_2$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$.
- 矩阵还可视为线性空间之间的映射或变换.
- 矩阵范数有新的要求---**相容性**.

定义1 如果对于任意的矩阵$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 都有一个非负实数与之对应, 记为$\|\boldsymbol{A}\|$, 且满足:

① 正定性: 当$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$时, $\|\boldsymbol{A}\| > 0$;

② 齐次性: 对任意$\lambda \in \mathbf{C}$, $\|\lambda\boldsymbol{A}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{A}\|$;

③ 三角不等式: $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \le \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$;

④ 相容性: 有$\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\|$;

则称$\|\boldsymbol{A}\|$是$\boldsymbol{A}$的矩阵范数.

例1 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 定义

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2},$$

证明$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$是矩阵范数. 称为Frobenius范数,简称F-范数.

证明 $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$就是把$\boldsymbol{A}$视作为$n^2$维向量的2-范数,从而满足正定性, 齐次性, 三角不等式, 因此,只需证明它满足相容性.

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,

$$\boldsymbol{AB}=(d_{ij})_{n\times n}, d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

由Cauchy-Schwarz不等式可知

$$|d_{ij}|^2=\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2,$$

所以

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{AB}\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left|d_{ij}\right|^2 \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} \left|b_{kj}\right|^2 \right) \\
&= \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^{n} \left|b_{kj}\right|^2 \right) \\
&= \|\boldsymbol{A}\|_F^2 \cdot \|\boldsymbol{B}\|_F^2.
\end{aligned}
$$

① $\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)} = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})}$.

② 乘以酉矩阵不改变F-范数.

设**Q**为酉矩阵, 则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\|_F^2 &= \operatorname{tr}\left((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A})^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right) = \|\boldsymbol{A}\|_F^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\|_F^2 &= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^H\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{A}^H\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right) = \|\boldsymbol{A}\|_F^2.\end{aligned}$$

矩阵范数与向量范数之间的**相容性**.

定义2 设$\|\cdot\|_M$为$\mathbf{C}^{n\times n}$中的矩阵范数, $\|\cdot\|_V$为$\mathbf{C}^n$中的向量范数. 若对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$, 总有

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_V\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\|_V,$$

就称矩阵范数$\|\cdot\|_M$与向量范数$\|\cdot\|_V$**相容**.

例2 $\mathbf{C}^{n\times n}$中的F-范数与$\mathbf{C}^n$中的2-范数相容.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{x}=(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n)^T$, 令

$$\boldsymbol{Ax}=(\zeta_1, \zeta_2,\ldots, \zeta_n)^T,\quad \zeta_i=\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\,.$$

由Cauchy-Schwarz不等式可得,

$$|\zeta_i|^2=\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right|^2\le\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2,$$

其中$i=1, 2,\ldots, n$.

所以

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \\
&= \|\boldsymbol{A}\|_F^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

注 对任意$\mathbf{C}^{n\times n}$中的矩阵范数$\|\cdot\|_M$, 必定存在$\mathbf{C}^n$中的向量范数$\|\cdot\|_V$与之相容.

取非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_V=\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}^H\|_M,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n,$$

则对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 总有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_V=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}^H\|_M$$
$$\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}^H\|_M$$
$$\le=\|\boldsymbol{A}\|_M\,\|\boldsymbol{x}\|_V.$$

① 矩阵范数与向量范数的相容性可用于估计 $\boldsymbol{Ax}$ 的范数的上界:

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_F \|\boldsymbol{x}\|_2.$$

② 注意$\|\boldsymbol{E}\|_F = \sqrt{n}$, 于是

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{Ex}\|_2 \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2,$$

可见用F-范数估计上界不够精确.

③ 是否有矩阵范数能够作更精确的估计?

3.3 矩阵的算子范数

定义1 设$\|\cdot\|_V$为$\mathbf{C}^n$中的范数, $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 定义

$$\|A\|_M=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}=\max_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V,$$

则$\|\cdot\|_M$为与$\|\cdot\|_V$相容的矩阵范数, 如此定义的范数称**算子范数**.

注 由上定义知对$\mathbf{C}^n$中的任意向量x，都有

$$\|Ax\|_V\le\|A\|_M\|x\|_V,$$

且存在$x_0\neq 0$使得$\|Ax_0\|_V=\|A\|_M\|x_0\|_V$.

命题 矩阵算子范数是矩阵范数.

证明 ① 由向量范数$\|\cdot\|_V$的正定性、齐次性和三角不等式可得$\|\cdot\|_M$也具有这些性质.

② 相容性: 对矩阵$\boldsymbol{AB}$, 有非零向量$\boldsymbol{x}_0$, 使得

$$\|\boldsymbol{AB}\|_M\|\boldsymbol{x}_0\|_V=\|\boldsymbol{ABx}_0\|_V$$
$$\le\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}\|\boldsymbol{Bx}_0\|_V$$
$$\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{B}\|_M\|\boldsymbol{x}_0\|_V,$$

约去正数$\|\boldsymbol{x}_0\|_V$, 即得$\|\boldsymbol{AB}\|_M\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{M}}$.

① 算子范数由向量范数定义,

② 称算子范数$\|\cdot\|_M$从属于向量范数$\|\cdot\|_V$.

③ 为方便, 把算子范数$\|\cdot\|_M$也记作$\|\cdot\|_V$,

④ 相容性可记为$\|\boldsymbol{Ax}\|_V \le \|\boldsymbol{A}\|_V \|\boldsymbol{x}\|_V$.

以下给出从属于$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$的算子范数.

① 我们先给出这些算子范数的结果,

② 再证明它们分别从属于$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$.

注意实函数$f(\boldsymbol{A})$是从属于$\|\cdot\|_V$的算子范数, 即

$$f(\boldsymbol{A}) = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V} \Leftrightarrow$$

1) 对任意向量$\boldsymbol{x}$, 有$\|\boldsymbol{Ax}\|_V \leq f(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}\|_V$,

2) 存在非零向量$\boldsymbol{x}_0$使得$\|\boldsymbol{Ax}_0\|_V = f(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}_0\|_V$.

定理1(列范数) 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 则从属于向量1-范数的矩阵算子范数$\|\boldsymbol{A}\|_1$为:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

注 $\|\boldsymbol{A}\|_1$为$\boldsymbol{A}$的列向量的1-范数的最大值, 故也称为$\boldsymbol{A}$的列范数.

定理2(行范数) 设矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 则$\boldsymbol{A}$从属于向量∞-范数的算子范数$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$为:

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

注 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$为$\boldsymbol{A}$的行向量的1-范数的最大值, 故也称为$\boldsymbol{A}$的行范数.

定理3(谱范数) 设矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 则$\boldsymbol{A}$从属于向量2-范数的算子范数$\|\boldsymbol{A}\|_2$为:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}.$$

其中$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$的**最大特征值**.

注 $\|\boldsymbol{A}\|_2$是半定矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$的最大特征值, 矩阵特征值的最大模称为谱半径, 故$\|\boldsymbol{A}\|_2$也称为**谱范数**.

例3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

求 $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{A}\|_\mathrm{F}$, $\|\boldsymbol{A}\|_2$.

解 计算可知

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{1}}=5, \|\boldsymbol{A}\|_\infty=5, \|\boldsymbol{A}\|_\mathrm{F}=\sqrt{23},$$

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{H}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{pmatrix}, \|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{15}.$$

例4 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$且$\boldsymbol{A}$的算子范数$\|\boldsymbol{A}\|<1$. 证明: $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆, 且

$$\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|},$$

$$\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{E}\|\leq\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}\|}.$$

3.4 矩阵序列

定义1 给定矩阵序列$\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbf{C}^{m\times n}$, 如果每个矩阵相同位置的元构成的数列都收敛:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n,$$

则称由极限值组成的矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$为矩阵序列$\boldsymbol{A}_k$的**极限**, 或矩阵序列$\boldsymbol{A}_k$**收敛**于$\boldsymbol{A}$, 记作

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{A}\ (k\to\infty).$$

注 当$m = 1$或$n = 1$时, 即得向量序列收敛的定义.

例1 设

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{k} & \dfrac{(-1)^k}{k^2} \\ \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k & \dfrac{\sin k}{k} \end{pmatrix},$$

求 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k$.

解 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}$.

定理1 设$\|\cdot\|$是矩阵空间$\mathbf{C}^{n\times n}$的任一范数, 则

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{A}\|=0$$

注 ① 由范数的等价性知, 仅需对某一种范数证明即可.

② 上定理对$\mathbf{C}^n$中的向量序列和任一向量范数也成立.

定理2 收敛的矩阵(向量)序列的范数有界. (任一种范数).

定理2 收敛的矩阵(向量)序列的范数有界. (任一种范数).

证明 设$\boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{A}$, 则$\|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| \to 0$, 所以数列$\|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\|$有界

于是存在$M > 0$, 使得对任意k, 都有

$$\|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| \le M,$$

从而

$$\|\boldsymbol{A}_k\| \le \|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{A}\|$$
$$\le M + \|\boldsymbol{A}\|.$$

命题 设下列极限和运算都有意义, 则

① $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k+\boldsymbol{B}_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k+\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}_k$;

② $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda_k\boldsymbol{A}_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k$;

③ $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}_k$;

④ $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k^{-1}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k\right)^{-1}$.

证明 只证明③, ④, 类似可证明①, ②.

注 ①, ②对$\mathbf{C}^n$中的向量也成立.

③ 设$\boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_k \to \boldsymbol{B}$ $(k\to\infty)$, 则

$$\|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| \to 0,\ \|\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{B}\| \to 0\ (k\to\infty).$$

注意$\|\boldsymbol{B}_k\|$有界, 所以

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \\
&= \|(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_k) + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\| \\
&\le \|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}_k\| + \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{B})\| \\
&\to 0\ (k \to \infty),
\end{aligned}$$

由定理1得

$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}_k.$$

④ 设 $\boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{A}\ (k \to \infty)$, 则 $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij} (k \to \infty)$,

注意到$\boldsymbol{A}_k^*$, $|\boldsymbol{A}_k|$和$\boldsymbol{A}^*$, $|\boldsymbol{A}|$分别由 $a_{ij}^{(k)}$ 和 a_{ij} 进行加, 减, 乘运算所得, 于是由数列极限性质可得

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k^* = \boldsymbol{A}^*, \quad \lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{A}_k| = |\boldsymbol{A}|.$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{A}_k^*}{|\boldsymbol{A}_k|}$$

$$= \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} = \boldsymbol{A}^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k\right)^{-1}.$$

定理3 $A^k \to O\ (k \to \infty) \Leftrightarrow A$所有特征值的模都小于1.

证明 设$A = QJQ^{-1}$, J为A的Jordan标准形, 则

$$A^k = QJ^kQ^{-1},$$

于是

$$A^k \to O \Leftrightarrow J^k \to O,$$

而$J^k \to O \Leftrightarrow J$中所有Jordan块的$k$次幂$\to O$.

设 $\boldsymbol{J_0}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}_{r\times r}$ 是$\boldsymbol{J}$的Jordan块

应用归纳法计算可得

$$\boldsymbol{J}_0^k=\begin{pmatrix}\lambda_0^k & k\lambda_0^{k-1} & \cdots & \binom{k}{r-1}\lambda_0^{k-r+1} \\ & \lambda_0^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k\lambda_0^{k-1} \\ & & & \lambda_0^k\end{pmatrix}_{r\times r}.$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} J^k = O \Leftrightarrow |\lambda_0| < 1,$$

而λ_0为$\boldsymbol{A}$的特征值, 因此$\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$的所有特征值的模都小于1.

定理4 若$\|\boldsymbol{A}\| < 1$, 则$\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O}\ (k \to \infty)$.

证明 注意到

$$\|\boldsymbol{A}^k\| \le \|\boldsymbol{A}\|^k \to 0\ (k \to \infty),$$

于是$\|\boldsymbol{A}^k\| \to 0\ (k \to \infty)$, 由定理1即得

$$\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O}\ (k \to \infty) .$$

例2 判断$\boldsymbol{A}^k$的敛散性, 其中

① $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$, ②$\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

解 ① 因为$\|\boldsymbol{A}\|_1=0.9<1$, 所以$\boldsymbol{A}^k\to\boldsymbol{O}$.

② 由$\boldsymbol{A}$的特征值为$\frac{5}{6},-\frac{1}{2}$, 于是$\boldsymbol{A}^k\to\boldsymbol{O}$.

3.5 矩阵幂级数的敛散性

矩阵幂级数是定义矩阵函数的基础.

定义1 给定$\mathbf{C}^{m\times n}$中一个矩阵序列

$$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k, \ldots,$$

其和式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

称为矩阵级数.

定义2 称

$$\boldsymbol{S}_N=\sum_{k=0}^{N}A_k$$

为$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$的**部分和**序列，若$\boldsymbol{S}_N\rightarrow\boldsymbol{S}$，就称矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$**收敛**到$\boldsymbol{S}$，或称$\boldsymbol{S}$为$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$的**和**，记作

$$\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\,.$$

① $\mathbf{C}^{m\times n}$中矩阵级数相当于mn个数项级数.

② 如果这mn个数项级数都绝对收敛, 就称该矩阵级数**绝对收敛**.

③ 绝对收敛一定收敛, 且任意改变级数各项的位置后仍绝对收敛, 且和不变.

例1 讨论$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$的敛散性, 其中

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2^k} & \dfrac{\pi}{4^k}\\ 0 & \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\end{pmatrix}.$$

定理1 $\mathbf{C}^{n\times n}$中的矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$绝对收敛$\Leftrightarrow$对任一矩阵范数$\|\cdot\|$, 正项级数$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}_k\|$收敛.

证明 由等价性知对矩阵的1-范数证明即可.

$(\Leftarrow)$ 设$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}_k\|_1$收敛, $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$, 注意

$$|a_{ij}^{(k)}|\le\|\boldsymbol{A}_k\|_1,\ 1\le i,j\le n,$$

于是$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$收敛, 即得$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$绝对收敛.

$(\Rightarrow)$ 设$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$绝对收敛,则$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|$都收敛,

从而$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$收敛.

对矩阵1-范数, 有

$$\|\boldsymbol{A}_k\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|,$$

因此$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}_k\|_1$收敛.

定理2 设$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$为给定矩阵, 若$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$收敛(绝对收敛), 则$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q}$也收敛(绝对收敛), 且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k\right)\boldsymbol{Q}.$$

证明 设$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k \to \boldsymbol{S}$, 则$\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{S}\right\| \to 0$,
故

$$\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}\right\| = \left\|\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{Q}\right\|$$

$$\leq \|\boldsymbol{P}\|\left\|\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{S}\right\|\|\boldsymbol{Q}\| \to 0.$$

即得$\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}$.

若$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$绝对收敛, 则$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}_k\|$收敛, 而

$$\|\boldsymbol{PA}_k\boldsymbol{Q}\| \le \|\boldsymbol{P}\|\cdot\|\boldsymbol{A}_k\|\cdot\|\boldsymbol{Q}\|,$$

于是$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{PA}_k\boldsymbol{Q}\|$也收敛, 即得$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{PA}_k\boldsymbol{Q}$绝对收敛.

定义(矩阵幂级数) 给定复方阵$\boldsymbol{A}$和一个复数序列c_k, 称方阵级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\boldsymbol{A}^k = c_0\boldsymbol{E} + c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

为$\boldsymbol{A}$的幂级数.

定理3 若$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$的收敛半径为$R$，且$\boldsymbol{A}$有一种矩阵范数$\|\boldsymbol{A}\| < R$，则$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$绝对收敛.

证明 注意到

$$\|c_k \boldsymbol{A}^k\| \le |c_k| \, \|\boldsymbol{A}\|^k,$$

由$\|\boldsymbol{A}\| < R$知

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot \|\boldsymbol{A}\|^k \text{收敛}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k \boldsymbol{A}^k\| \text{收敛}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k \text{绝对收敛}.$$

定义3 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的全部特征值, 称$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k|$为$\boldsymbol{A}$的**谱半径**.

注 $\rho(\boldsymbol{A})$是矩阵范数的**最大下界**

定理4 谱半径不超过任一矩阵范数.

证明 设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\neq 0$, 对任一矩阵范数, 都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$$

$$\Rightarrow |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|.$$

由$\boldsymbol{x}$非零可知$\|\boldsymbol{x}\|>0$, 于是$|\lambda|\le\|\boldsymbol{A}\|$, 从而

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max|\lambda| \le \|\boldsymbol{A}\|.$$

分别取矩阵1-范数, ∞-范数和2-范数, 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$可得

$$\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})}.$$

定理5 若$\boldsymbol{A}$为n阶正规矩阵, 则$\rho(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2$.

证明 设$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 且

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

则$\rho(\boldsymbol{A}) = |\lambda_1|$.

由$\boldsymbol{A}$是正规矩阵知存在酉矩阵$\boldsymbol{U}$使得

$$\boldsymbol{U}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

计算得

$$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2&=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}\\&=|\lambda_1|=\rho(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

定理6 设$\boldsymbol{A}$为给定的方阵, 则对任意$\varepsilon>0$, 都存在某个矩阵范数$\|\cdot\|$, 使得$\|\boldsymbol{A}\| \le \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon$.

证明 设$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为$\boldsymbol{J}$, 则有可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & & & \\ & \lambda_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & c_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_k为$\boldsymbol{A}$的特征值, c_k等于0或1.

令$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \varepsilon c_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon c_{n-1} \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

对$\mathbf{C}^{n\times n}$中的矩阵$\boldsymbol{B}$, 定义

$$f(\boldsymbol{B}) = \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BPD}\|_1.$$

容易验证$f(\boldsymbol{B})$是矩阵范数, 记为$\|\boldsymbol{B}\|$, 则

$$\|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APD}\|_1$$
$$= \max\{|\lambda_1|, |\varepsilon c_1| + |\lambda_2|, \ldots, |\varepsilon c_{n-1}| + |\lambda_n|\}$$
$$\leq \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon.$$

注 上面构造的范数与$\boldsymbol{A}$有关.

定理7 设幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$的收敛半径为$R$, $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 则

① 当$\rho(\boldsymbol{A}) < R$时, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$绝对收敛,

② 当$\rho(\boldsymbol{A}) > R$时, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$发散.

证明 ① 当$\rho(\boldsymbol{A}) < R$时, 存在正数ε使得

$$\rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon < R,$$

于是存在某个矩阵范数$\|\boldsymbol{A}\|$使$\|\boldsymbol{A}\| < R$, 因此

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$绝对收敛.

反之, 若$\rho(\boldsymbol{A}) > R$, 设

$$\rho(\boldsymbol{A}) = |\lambda_0| > R, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0^H\boldsymbol{x}_0 = 1$$

如果$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$收敛, 那么

$$\boldsymbol{x}_0^H\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k\right)\boldsymbol{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{x}_0^H \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{x}_0^H \lambda_0^k \boldsymbol{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_0^k (\boldsymbol{x}_0^H \boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_0^k$$

也收敛, 与$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_0^k$发散矛盾, 即得.

例2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

判别矩阵幂级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{\boldsymbol{A}}{4}\right)^{k}$$

的敛散性.

解 $\rho(\boldsymbol{A})=3, R=4$, 因此绝对收敛.

例3 设

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 6\end{pmatrix},$$

判定$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$的敛散性, 收敛时求其和.

解 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\frac{9}{10}<1$, 故绝对收敛, 和等于

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8 & 14\\ 6 & 18\end{pmatrix}.$$