第4章 矩阵函数

4.1 矩阵函数的定义 · 用Jordan标准形计算矩阵函数

4.2 用待定系数法计算矩阵函数

4.1 矩阵函数的定义·用Jordan标准形计算矩阵函数

4.1.1 矩阵函数的定义

4.1.2 用Jordan标准形计算矩阵函数

4.1.1 矩阵函数的定义

问 对$e^x, \sin x, \ln x$等函数，能否定义出相应的矩阵函数?

答 用矩阵幂级数来定义矩阵函数.

定义1 设函数$f(\lambda)$可展成幂级数:

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^k,$$

其收敛半径为R，当$\rho(\boldsymbol{A})<R$时，定义$\boldsymbol{A}$的**矩阵函数**

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\boldsymbol{A}^k.$$

例如

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!},R=\infty,$$

$$\Rightarrow e^{\boldsymbol{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{k}}{k!},\forall\boldsymbol{A};$$

$$\sin\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!},R=\infty,$$

$$\Rightarrow\ \sin\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\boldsymbol{A}^{2k+1}}{(2k+1)!},\forall\boldsymbol{A};$$

$$\ln(1+\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\lambda^k}{k},R=1,$$

$$\Rightarrow\ln(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^k}{k},\rho(\boldsymbol{A})<1.$$

例1 设4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\pi, -\pi, 0, 0$, 计算$e^{\boldsymbol{A}}, \sin \boldsymbol{A}$.

解 $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)\lambda^2=\lambda^4-\pi^2\lambda^2,$$

由Cayley-Hamilton定理可知

$$\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2,$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{2k}=\pi^{2k-2}\boldsymbol{A}^2,$$

$$\boldsymbol{A}^{2k+1}=\pi^{2k-2}\boldsymbol{A}^3, k=2,3,\cdots.$$

计算可得

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}} &= E+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}}{3!}+\frac{\boldsymbol{A}^4}{4!}+\frac{\boldsymbol{A}^5}{5!}+\cdots \\
&= E+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}+\frac{\pi^2\boldsymbol{A}^2}{4!}+\frac{\pi^2\boldsymbol{A}^3}{5!}+\cdots \\
&= E+\boldsymbol{A}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{\pi^2}{4!}+\cdots\right)\boldsymbol{A}^2 \\
&\quad +\left(\frac{1}{3!}+\frac{\pi^2}{5!}+\cdots\right)\boldsymbol{A}^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E + \boldsymbol{A} + \left[\left(1 + \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} + \cdots\right) - 1\right]\frac{\boldsymbol{A}^2}{\pi^2} \\
&\quad + \left[\left(\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots\right) - \pi\right]\frac{\boldsymbol{A}^3}{\pi^3} \\
&= E + \boldsymbol{A} + \left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} - 1\right)\frac{\boldsymbol{A}^2}{\pi^2} \\
&\quad + \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} - \pi\right)\frac{\boldsymbol{A}^3}{\pi^3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{A}^5}{5!} - \frac{\boldsymbol{A}^7}{7!} + \cdots \\
&= \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \frac{\pi^2 \boldsymbol{A}^3}{5!} - \frac{\pi^4 \boldsymbol{A}^3}{7!} + \cdots \\
&= \boldsymbol{A} + \left[\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots\right) - \pi\right] \frac{\boldsymbol{A}^3}{\pi^3} \\
&= \boldsymbol{A} + (\sin \pi - \pi) \frac{\boldsymbol{A}^3}{\pi^3} \\
&= \boldsymbol{A} - \frac{1}{\pi^2} \boldsymbol{A}^3.
\end{aligned}
$$

对给定的矩阵$\boldsymbol{A}$:

① 零化多项式使$\boldsymbol{A}$的高次幂化为低次幂, 从而使矩阵幂级数转化为一个多项式;

② $f(\boldsymbol{A})$的值就等于$\boldsymbol{A}$的一个多项式;

③ 可设该多项式的次数小于$\boldsymbol{A}$的最小多项式的次数;

本章介绍两种计算矩阵函数方法: **Jordan标准形法**和**待定系数法**.

4.1.2 用Jordan标准形计算矩阵函数

后续推理中常用到以下性质:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k\right)\boldsymbol{Q};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_1^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_s^{(k)} \end{pmatrix}.$$

设

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^k,\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{QJQ}^{-1},$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{J}$是$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形, $\boldsymbol{J}_k$为Jordan块.

计算可得

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\boldsymbol{A}^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{QJQ}^{-1})^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\boldsymbol{QJ}^k\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\boldsymbol{J}^k\right)\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{Q}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s^k\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \boldsymbol{J}_s^k \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

注 矩阵函数的可化为Jordan块的函数.

下面讨论Jordan块$\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{J}(\lambda_0,h)$的函数$f(\boldsymbol{J}_0)$.

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}(\lambda-\lambda_0)^k,$$

则

$$f(\boldsymbol{J}_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}(\boldsymbol{J}_0-\lambda_0\boldsymbol{E})^k$$

其中$\boldsymbol{J}_0-\lambda_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}(0,h)$.

性质 记 $\boldsymbol{J}(0,h)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{J}(0,h)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\cdots,$$

$$\boldsymbol{J}(0,h)^{h-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}(0,h)^h=\boldsymbol{O}.$$

于是

$$f(\boldsymbol{J}_0)=\sum_{k=0}^{h-1}\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\boldsymbol{J}(0,h)^k$$

$$=f(\lambda_0)\boldsymbol{E}+f'(\lambda_0)\boldsymbol{J}(0,h)+\frac{f''(\lambda_0)}{2!}\boldsymbol{J}(0,h)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(h-1)}(\lambda_0)}{(h-1)!}\boldsymbol{N}^{h-1}$$

$$
=\begin{pmatrix}
f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(h-1)}(\lambda_0)}{(h-1)!} \\
 & f(\lambda_0) & f'(\lambda_0) & \ddots & \vdots \\
 & & f(\lambda_0) & \ddots & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} \\
 & & & \ddots & f'(\lambda_0) \\
 & & & & f(\lambda_0)
\end{pmatrix}.
$$

注 $f(J_0)$存在$\Leftrightarrow f^{(j)}(\lambda_0)$存在, $j=0,1,\cdots,h-1$.

定理1 设矩阵$\boldsymbol{A}$的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{j_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{j_t}$$

则$f(\boldsymbol{A})$存在$\Leftrightarrow$

$$f^{(k)}(\lambda_i)\quad(k=0,1,\cdots,j_i-1;\ i=1,\cdots,t)$$

都存在.

注 ① 当$f(\lambda)$以幂级数的形式给出, 且$\rho(\boldsymbol{A})$小于收敛半径R时, 定理1的条件自然满足.

② 定理1意义在于对一般函数$f(\lambda)$给出$f(\boldsymbol{A})$存在的充要条件.

用Jordan标准形计算矩阵函数步骤:

① 求$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形$\boldsymbol{J}$和过渡矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

② 计算

$$f(\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix},$$

若$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{J}(\lambda_k,n_k)$, 则

$$f(\boldsymbol{J}_k)=\begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \dfrac{f^{(n_k-1)}(\lambda_k)}{(n_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

③ 计算$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{Q}^{-1}$.

例2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},$$

求$e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}$.

解 计算得 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

① 对$e^{\boldsymbol{A}}, f(\lambda)=e^{\lambda}, f'(\lambda)=e^{\lambda}$, 于是

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}} &= f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{Q}^{-1} \\ &= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} \\ &= e^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

② 对$e^{\boldsymbol{A}t}$, $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, $f'(\lambda)=te^{\lambda t}$, 于是

$$e^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

③ 对$\sin\boldsymbol{A}$, $f(\lambda)=\sin\lambda$, $f'(\lambda)=\cos\lambda$, 于是

$$\sin\boldsymbol{A}=f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\sin 2 & 0 & 0\\ 0 & \sin 2 & \cos 2\\ 0 & 0 & \sin 2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin 2 & 0 & 0\\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2\\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2\end{pmatrix}.$$

4.2 用待定系数法计算矩阵函数

对取定的$\boldsymbol{A}$以及$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QJQ}^{-1}$.

① 计算$f(\boldsymbol{A})$, 最终归结为计算$f(\boldsymbol{J}_k)$.

② 若$\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{J}(\lambda_k,n_k)$, 则$f(\boldsymbol{J}_k)$由$f^{(i)}(\lambda_k), i=0,1,\dots,n_k-1$唯一确定.

③ 对两个函数$f(\lambda), g(\lambda)$, 只要

$$f^{(i)}(\lambda_k)=g^{(i)}(\lambda_k), i=0,1,\dots,n_k-1,$$

就有$f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$.

定义1 设矩阵$\boldsymbol{A}$的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{j_1}(\lambda-\lambda_2)^{j_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{j_t},$$

称集合$\{(\lambda_i,j_i)|i=1,\cdots,t\}$为$\boldsymbol{A}$的**谱**, 记为$\Lambda_{\boldsymbol{A}}$.

定义2 设$f(\lambda),g(\lambda)$是两个函数, 如果

$$f^{(k)}(\lambda_i)=g^{(k)}(\lambda_i),\forall 1\le i\le t,0\le k\le j_i-1,$$

就称$f(\lambda),g(\lambda)$**在$\Lambda_{\boldsymbol{A}}$上相等**, 记作

$$f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=g(\Lambda_{\boldsymbol{A}}).$$

注 若$\partial m(\lambda)=m=j_1+\cdots+j_t$, 则$f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$中有$m$个等式.

定理 对于矩阵$\boldsymbol{A}$和两个函数$f(\lambda), g(\lambda)$, 有

$$f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow f(\Lambda_{\boldsymbol{A}}) = g(\Lambda_{\boldsymbol{A}}).$$

① 设$\boldsymbol{A}$的最小多项式的次数为m, 则对任意函数$f(\lambda)$, 存在一个次数不超过$m-1$的多项式$g(\lambda)$, 使得$f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})$.

② 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}}) = f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$可得以$g(\lambda)$的$m$个系数为未知量的$m$个线性方程.

③ 可以证明该线性方程组存在唯一解, 由此即可确定$g(\lambda)$.

用待定系数法计算矩阵函数步骤:

① 求$\boldsymbol{A}$的最小多项式

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{j_1}(\lambda-\lambda_2)^{j_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{j_t}.$$

② 记$\partial m(\lambda)=m$, 设

$$g(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{m-1}\lambda^{m-1},$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$为待定系数.

③ 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$列出$m$个线性方程, 解出$a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$.

④ $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})=a_0+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}$.

例1 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$, 求$e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}$.

解 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}=\{(2,2)\}$, 设$g(\lambda)=a_0+a_1\lambda$.

①对$e^{\boldsymbol{A}}, f=e^{\lambda}, f'=e^{\lambda}$, 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$

解得$a_0=-e^2, a_1=e^2$, 于是

$$e^{\boldsymbol{A}}=-e^2\boldsymbol{E}+e^2\boldsymbol{A}$$

$$=e^2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

② 对$e^{\boldsymbol{A}t}, f=e^{\lambda t}, f'=te^{\lambda t}$, 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$

解得

$$a_0=(1-2t)e^{2t}, a_1=te^{2t},$$

于是

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= (1-2t)e^{2t}\boldsymbol{E}+te^{2t}\boldsymbol{A} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

③ 对 $\sin \boldsymbol{A}$, $f=\sin\lambda$, $f'=\cos\lambda$, 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$解得

$$a_0=\sin 2-2\cos 2,\ a_1=\cos 2,$$

于是

$$\sin \boldsymbol{A}=(\sin 2-2\cos 2)\boldsymbol{E}+(\cos 2)\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2 \end{pmatrix}.$$

例2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{pmatrix},$$

求$e^{\boldsymbol{A}t}$.

解 计算知$\Lambda_{\boldsymbol{A}}=\{(2,1),(-1,2)\}$.

对$e^{\boldsymbol{A}t}$, $f=e^{\lambda t}, f'=te^{\lambda t}$, 由$g(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$解得

$$a_0 = \frac{1}{9}[e^{2t} + (8+6t)e^{-t}], a_1 = \frac{1}{9}[2e^{2t} - (2-3t)e^{-t}],$$
$$a_2 = \frac{1}{9}[e^{2t} - (1+3t)e^{-t}].$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \frac{1}{9}[e^{2t} + (8+6t)e^{-t}]\boldsymbol{E} + \frac{1}{9}[2e^{2t} - (2-3t)e^{-t}]\boldsymbol{A} + \frac{1}{9}[e^{2t} - (1+3t)e^{-t}]\boldsymbol{A}^2$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} e^{2t} + (8+6t)e^{-t} & 2e^{2t} - (2-3t)e^{-t} & e^{2t} - (1+3t)e^{-t} \\ 2e^{2t} - (2+6t)e^{-t} & 4e^{2t} + (5-3t)e^{-t} & 2e^{2t} - (2-3t)e^{-t} \\ 4e^{2t} - (4-6t)e^{-t} & 8e^{2t} - (8-3t)e^{-t} & 4e^{2t} + (5-3t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$