矩阵理论复习

例1 记 $\mathbf{R}^+ = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 0\}$, 在 $\mathbf{R}^+$上定义新的"加法$\oplus$"和"数乘$\otimes$"为:

$$x \oplus y = xy,\ \ \lambda \otimes x = x^{\lambda},\ \ x, y\in\mathbf{R}^+,\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

则在此加法和数乘下, $\mathbf{R}^+$为$\mathbf{R}$上的线性空间.

例2 取$P[x]_3$的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = 1, \boldsymbol{\alpha}_2 = x, \boldsymbol{\alpha}_3 = x^2$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_1 = 1, \boldsymbol{\beta}_2 = x - x_0, \boldsymbol{\beta}_3 = (x - x_0)^2.$$

求前一组基到后一组基的过渡矩阵，并计算$\boldsymbol{q} = 3 - x^2$在后一组基下的坐标.

例3 设V_1和V_2分别为数域P上的齐次线性方程组

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

和

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间，证明$P^n = V_1 \oplus V_2$.

例4 取多项式空间$\mathbf{R}[x]_4$的两组基:

$$1, x, x^2, x^3$$

和

$$1, x-x_0, \frac{(x-x_0)^2}{2!}, \frac{(x-x_0)^3}{3!},$$

计算求导变换D在这两组基下的矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 并验证它们相似.

例5 在欧氏空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$中, 定义内积

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}\,,$$

$$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{2\times 2},\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{2\times 2}.$$

设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$W=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\},$$

① 求$W^{\perp}$的基, ② 求$W^{\perp}$的标准正交基.

例6 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in P^{2\times 2}$, 定义线性变换

$$T: P^{2\times 2}\to P^{2\times 2}, T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{XB},$$

并记子空间$W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in P^{2\times 2}\middle| b+c=0\right\}$.

① 求W 的一组基;

② 证明W是T 的不变子空间;

③ 将T 看作W上的线性变换, 求其特征值与特征向量;

④ 求W的基, 使T 在其下的矩阵为对角阵.

例7 求

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}$$

的行列式因子和不变因子.

例8 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

① 求$\boldsymbol{A}$的Jordan 标准形$\boldsymbol{J}$,

② 求可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}$.

例9 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

求$g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-2\boldsymbol{A}^6+\boldsymbol{A}^5+3\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

例10 求$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$的最小多项式.

例11 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

求 $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$, $\|\boldsymbol{A}\|_2$.

例12 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

判别矩阵幂级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{\boldsymbol{A}}{4}\right)^{k}$$

的敛散性.

例13 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},$$

求$e^{\boldsymbol{A}},e^{\boldsymbol{A}t},\sin\boldsymbol{A}$.